



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

7ⁿ M328

QA
35
261

Anfangsgründe
der
Mathematik,

zum Gebrauche
der mathematischen Schule des kaisert. königl.
Artilleriecorps.

Dritter Teil.

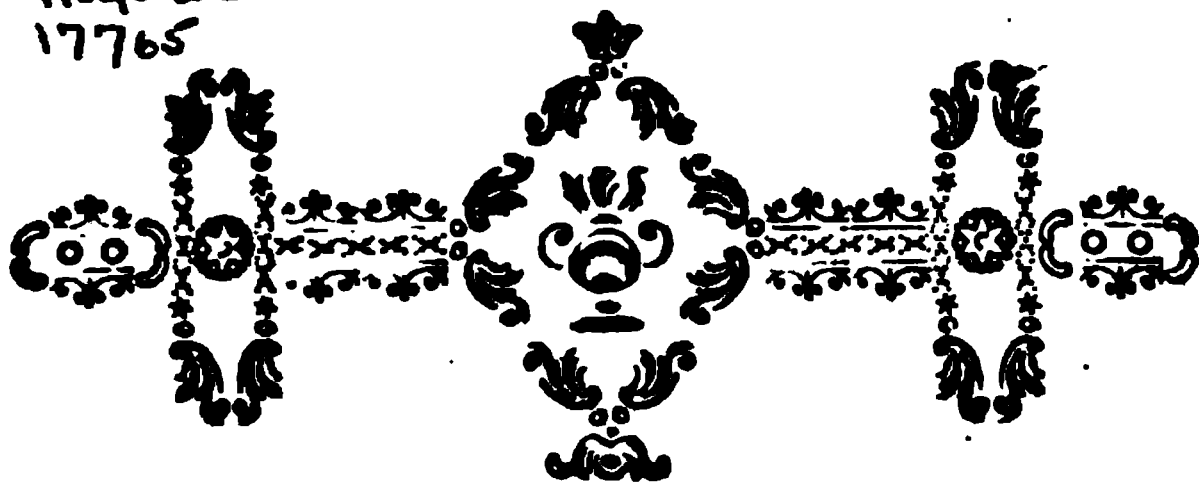
Die
**Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie
und Hydraulik**

oder
von dem Gleichgewicht, und von der Be-
wegung der festen, und flüssigen
Körper.


V e r f a s s t
Von Leopold ^{nachher von} Unterberger,
Major und öffentlichen Lehrer der Mathematik
bei dem kaisert. königl. Feldartilleriecorps.

B J E N,
gedruckt bey Joh. Thom. Edl. von Trattnern,
kaisert. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

Hist. Sci.
Gaißel
11.9.28
17765



V o r r e d e.

 Nach öftern und langen Unterbrechungen bin ich endlich im Stande den dritten Teil der mathematischen Anfangsgründen, der von der Bewegung der festen und flüssigen Körper handelt, zu liefern. Ich brauche ienen Anfängern, für die dieses Werk eigentlich bestimmt ist, die Nothwendigkeit der Mechanik zur gründlichen Erlehrung ihres Metiers nicht erst weitläufig zu erklären und anzupreisen, da ihnen ohnehin nicht mehr unbekant sein kan, daß die Artilleriewissenschaft, in so ferne sie Körper nach einem verlangten Gegenstand schießen und werfen lehret, auf gewisse Art selbst als ein Teil der Mechanik angesehen werden mus. Vielmehr scheint mir daran zu liegen, meine übrigen Leser zu unterrichten, welchen Gesichtspunkt ich mir bei der Verfassung dieser Anfangsgründen der Mechanik genommen habe, damit Sie solche nach eben demselben zu betrachten und zu beurteilen die Güte haben möchten.

V o r r e d e.

Da dieses Werk angehenden Artilleristen in der Schule vorgetragen, und mündlich erklärt zu werden bestimmt ist, so mus es zwar die wesentlichsten Gründe hauptsächlich iener Theilen der Mechanik die in die Artillerie einigen Einfluß nehmen, enthalten; dieselbe dürfen aber nicht zu weit ausgedehnet werden, damit die Vorlesungen nicht übermäßig lang dauern. Ich schränke mich also dahin ein, daß ich

Erstens: eine kurze Einleitung in die Mechanik gebe, und darinn die allgemeinen Eigenschaften der Körper und die ersten und nöthigsten Begriffe davon vortrage.

Zweitens: folgen die Gründe von der einfachen und zusammengesetzten, von der zu und abnehmenden Bewegung und von dem freien Falle der Körper.

Drittens: kommt die Lehre von den geworfenen Körpern vor. Weil diese Materie hauptsächlich einen Artilleristen angehet, so habe ich sie etwas weiter als die übrigen ausgedehnet. Ich werde mir zwar vielleicht dadurch, daß ich diese Abhandlung blos nach der Theorie der Parabol einrichte, den Tadel einiger meiner Leser zuziehen; allein ich habe anmit die Ehre dieselben zu versichern, daß solches weder aus einer Unwissenheit, daß die geworfenen Körper in ihrem Fluge keine wirkliche Parabol beschreiben, noch weniger aber aus einiger Verachtung gegen eine Erfindung die dem menschlichen Verstande so viele Ehre macht, nehmlich gegen dem höhern Kalkül, sondern blos aus der Ursach so geschehen seie, erstens weil ich schon beim Anfange meiner Arbeit ausdrücklich befohlen

wur

V o r r e d e

wurde, in diesen Anfangsgründen der Mathematik, welche eigentlich für alle unsere Zöglinge bestimmt sind, noch nichts von den höhern Theilen einfließen zu lassen; zweitens weil man in der Bestimmung der wahren Grösse des Widerstandes der Luft, und folglich auch der eigentlichen Fluglinie der Bomben und Kugeln wegen den in der Ausübung vorkommenden zufälligen, nichts destoweniger aber oft sehr beträchtlichen Hindernissen es bisher noch nicht soweit gebracht zu haben scheint, daß man in der Ausübung einen allgemeinen Gebrauch davon machen, oder einen wesentlichen Vorteil ziehen könnte. Daß diese Hindernissen sich in der That einfinden, wird wohl niemand läugnen, der mit den Artillerieübungen näher bekannt ist, und folglich weis, wie man mit vollkommen gleichen Ladungen und Richtungen des Geschüßes dennoch oft sehr beträchtlich unterschiedene Schuß und Wurfweite erhält. Wenn man von den neu entdeckten Fluglinien der Bomben und Kugeln einen wahrhaft nützlichen Gebrauch zu machen hoffen will, so ist meines Erachtens nichts so nothwendig, als diesen Hindernissen fleißig nachzuspüren, ihren Wirkungen so viel möglich vorzubeugen, oder wenigstens die Grösse derselben nur einiger Maassen zu bestimmen zu suchen. Hier ist es eigentlich, wo einem eifrigen und aufgeklärten Beobachter noch ein sehr weites Feld offen steht, und nur wenn dieses gehörig bearbeitet sein wird, werden wir die Kunst zu schießen und werfen auf eine grössere Vollkommenheit zu bringen im Stande sein.

Viertens: werden die ersten Gründe von dem Stoffe der vollkommen elastischen und nicht elastischen Körper vorgetragen; ich habe mich aber enthalten würd-

V o r r e d e .

liche Anwendungen davon auf dem Stöße der Kugeln und Bomben, und ihr Eindringen in die Gegenstände zu machen, theils weil mir vollständige Experimente fehlen; theils auch weil man wegen der fast unendlichen Verschiedenheit der Materien, gegen welche geschossen oder geworfen wird, fast nichts als bloße Voraussetzungen machen kan.

Fünftens: wird sowohl die Erfindung des Schwerpunkts an verschiedenen Linien, Flächen und Körpern, als die Berechnung ihres Inhalts nach dem Wege, den der Schwerpunkt an ihrer Erzeugungsfläche bei ihrer Entstehung gehet, gewiesen. Da manche Flächen und Körperinhalte ohne dieser so schönen als nützlichen Erfindung, durch die gewöhnlichen Regeln der Geometrie nur sehr schwer gefunden werden könnten, und bei der Berechnung des kubischen Inhalts und der Schwere des Metals eines Geschüßes eben solche Körper vorkommen, und die erforderliche Lage der Schildezapfen an einer Kanone durch die Erfindung ihres Schwerpunktes bestimmt werden mus, so wird diese Materie einem Artilleristen besonders unentbehrlich.

Sechstens: kommt die Abhandlung von den einfachen und zusammengesetzten Maschinen blos nach ihrem Gleichgewichtsstande und ohne Reibung ihrer Teile betrachtet vor; dann aber wird auch in verschiedenen und meist vorkommenden Fällen gewiesen, wie die Größe der Reibung an den verschiedenen Theilen der Maschinen zu berechnen seie. Da der Raum keine weitere Ausdehnung über diese Materie erlaubt, und die Hauptabsicht mehr dahin gehet, daß ieder angehender Artillerist von dem Maschinenwesen zwar allgemeine gründliche Begriffe, keines Wegs aber eine voll-

tome

V o r r e d e.

kommen ausgebreitete Kenntniss eines eigentlichen Machinisten erlange, so könnte das, was davon angeführt worden, hinlänglich sein.

So wie bisher die Lehre von der Bewegung der festen Körper vorgetragen worden, eben so darf unsern Anfängern die Kenntniss von dem Gleichgewicht, von dem Druck, und von der Bewegung der flüssigen Körper nicht unbekant bleiben. Derowegen werden

Siebentens: die Gesetze von dem Gleichgewicht der flüssigen Körper, von ihrem Druck gegen die Grund und Seitenflächen ihrer Behälter, von eingetauchten festen Körpern in flüssige, und von der eigenthümlichen Schwere verschiedener Materien vorgetragen.

Da ferner ohnehin einleuchtend genug ist, was die Luft sowohl auf das Schießpulver als auf die geschossenen und geworfenen Körper für eine Macht hat, so können die Eigenschaften und Wirkungen derselben, in so weit sie uns nemlich bekant sind, um so weniger übergangen werden; aus dieser Ursach wird

Achtens: von den Eigenschaften der Luft überhaupt, dann von dem Gleichgewicht derselben mit andern flüssigen Materien, und endlich von der Bewegung derselben und von dem Widerstand, den sie gegen andere Körper ausübet, gehandelt. Nur Schade! daß die menschliche Kenntniss hierinnen wie in vielen andern physisch - mathematischen Dingen noch nicht gänzlich soweit gekommen ist, die Grösse ihrer Wirkungen in allen Fällen so richtig voraus bestimmen zu können, wie wohl bei den Ausübungen in der Artillerie nöthig wäre.

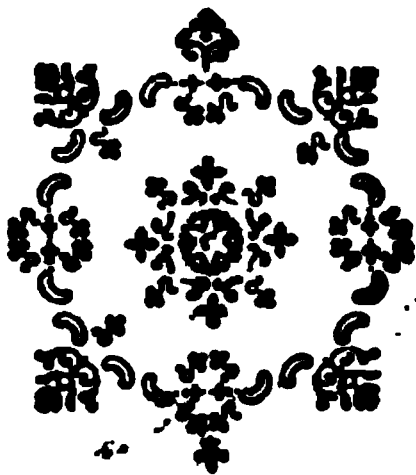
Es

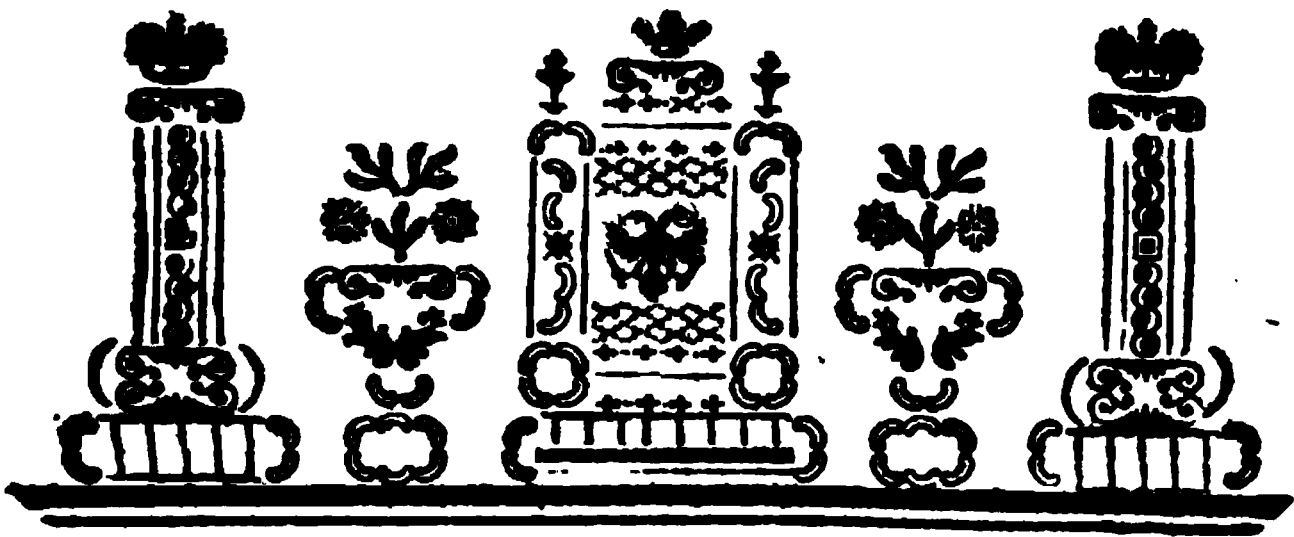
V o r r e d e.

Etwas minder wichtig für einen Artilleristen scheinen die Geseze der Bewegung des Wassers oder anderer flüssiger Materien zu sein; um aber doch einige Kenntnisse im bedürfenden Falle zu haben, so wird endlich

Neuntens, von der Bewegung des Wassers so wohl durch seine eigene Schwere, als durch den Druck der Luft nur im kurzen gehandelt; dann werden einige Gründe von dem Stosse des Wassers gegen denselben entgegengesetzte Flächen angegeben, und leztlich einige der üblichsten und nüzlichsten Wassermaschinen erklärt.

Ubrigens wünsche ich nichts so sehr, als durch diese meine Bemühung die Hauptabsicht zu erreichen, und den Beifal meiner Leser zu verdienen.





Anfangsgründe

der

Mechanik.

Einleitung.

§. 1.

Ein Körper ist ein Zusammenhang von mehreren Theilen der Materie, woraus er bestehet, und hat folgende allgemeine Haupteigenschaften in sich:

1. Kein Theil der Materie, so klein man sich ihn auch vorstelllet, kan mit einem andern in dem nehmlichen Ort zu gleicher Zeit sein; d. i. die Materie oder der Körper ist undurchdringlich (Corpus est impenetrabile).

2. Da die Theile des Körpers wegen der Undurchdringlichkeit ausser und nebeneinander sein müssen, so mus derselbe nothwendig einen Raum in die Länge, Unterb. Mechanik, III. Th. 2. Breit-

2 Anfangsgründe der Mechanik:

Breite, und Höhe einnehmen; folglich eine Ausdehnung haben, (Volumen). S. 3. Geomet.

3. Die äußerste Gränzen der Ausdehnung eines Körpers heisset man die *Sigur* desselben (*Figura*).

4. Jeder Körper ist aus mehreren Theilen der Materie zusammengesetzt, S. 1. Weil aber der Zusammenhang der Materie zu ihrem Dasein eben nicht ausdrücklich nöthig ist, so lassen sich dieselbe entweder im Gedanken, oder wirklich von einander trennen oder absondern; D. i. der Körper ist theilbar. (*Corpus est divisibile*).

Solche Theilungen geschehen so wohl durch die Kunst als durch die Natur fast bis ins Unendliche. 3. B. Man schlägt eine einzige Gran Gold durch die Kunst so dünne, daß solche eine Fläche von 50 Quadratfollen bedeckt. Nun giebt die Erfahrung, daß ein eben nicht alzu scharfes Auge, wenn es auch mit keinem Vergrößerungsglase bewaffnet wird, einen halben Punkt oder den 24ten Theil einer Längenslinie noch wohl unterscheiden könne. Da nun in einem Längenzolle 288 solche halbe Punkten enthalten sind, so müssen sich in einem Quadratfoll 288 \times 288 = 82944 solche halbe Quadratpunkten, und folglich in 50 Quadratfollen 4147200 als sichtbar befinden. Betrachtet man ferner, daß man an dieser Goldplatte auf einer Seite nicht die nehmliche Theile wie auf der andern, sondern wiederum neue zu Gesicht bekommt, so ist klar, daß man zu beiden Seiten 4147200 \times 2 = 8294400 Theile entdecken könne. Sollte aber das Auge noch mit einem Vergrößerungsglase, welches die Gegenstände um 10000male vergrößert (welches eben nichts außerordentliches ist) verstärkt werden, so wurden auch

auch noch 10000mal kleinere Teile kentlich, und also $8294400 \times 10000 = 82944000000$ Teile von einer einzigen Gran Gold zu sehen sein. Eine beträchtliche Summe! und dennoch wird das Gold bei der Vergoldung eines Stücks Silber, und Ausziehung desselben bis zum feinsten Drate, dessen man sich gewöhnlich zu Borden wirsen und ändern dergleichen Arbeiten bedienet, und der noch immer vergoldet ist, in noch weit zartere Teile zerteilet. Die Natur gehet in der Zerteilung der Körper in sehr kleine Teile ungleich weiter, als wir durch die Kunst zu thun vermögen. Es verräth sich dieses an der Ausdunstung von riechenden Sachen am aller deutlichsten. Z. B. Wenn nur eine Gran Ambra auf Kohlenfeuer verbrant wird, so nimt der Geruch davon ein ganzes grosses Zimmer ein. Wer wird nun wohl läugnen, daß nicht fast in den meisten Punkten des Zimmerraumes ein kleines Ambrateilchen befindlich sei? Eben so ist es mit der Ausdunstung der Blumen und Kräuter, des Teufelsdrecks (Afia foetida) des Schwefels, und mit den in Dunst aufgelösten Geistern und Wässern beschaffen.

5. Lehret uns die Erfahrung, daß alle bisher bekante Körper mit Schweislöchern versehen sind. (Corpus porosum est). D. i. die kleine Teile der Materie, woraus der Körper bestehet, hangen nicht gänzlich so nahe zusammen, daß kein Zwischenraum staat hätte.

Man trift vielmehr dergleichen in allen, auch ienc nicht ausgenommen, die uns am dichtesten scheinen, an. Diese Schweislöcher (Pori) sind bei einigen z. B. bei einem Schwammen, bei dem

Bimsenstein u. m. d. g. augenscheinlich sichtbar; bei andern sind sie zwar nicht so deutlich, aber die Vergrößerungsgläser, und andere damit angestellte Versuche geben sie uns unzweifelhaft zu erkennen; der Unterschied derselben besteht hauptsächlich nur in dem, daß sie in dichtern Körpern feltner, oder kleiner, in weniger dichten aber häufiger oder grösser, und in verschiedenen Materien auch von verschiedener Gestalt und Ordnung angetroffen werden.

6. Alle Körper die unserer Erdoberfläche noch in einer gewissen Nähe sind, haben eine gewisse Kraft, vermög welcher sie gerade gegen dem Mittelpunkt der Erde mit gleicher Geschwindigkeit geführt werden, wenn sie nicht durch äussere Gegenstände daran gehindert sind; und diese Kraft wird die Schwere (Gravitas) genent.

Sie ist in dem ganzen Körper ausgeteilet, d. i. auch die kleinsten Teile der Materie, woraus der Körper bestehet, sind, wenn sie einander gleich, mit gleicher Schwere begabt. Bestehet nun ein Körper aus mehreren solchen Teilen als ein anderer, so ist er auch schwerer als derselbe.

§. 2. Die Menge der in einen Körper vorhandenen Materie wird die Masse (Mасса) genent. Wenn nun die erstere in Körpern von gleicher Ausdehnung und gleichartiger Materie gleich ist, so sind auch ihre Massen gleich; oder sie verhalten sich in Körpern von ungleicher Ausdehnung wie diese. Da aber die Menge der Materie in ungleichartigen Körpern von gleicher Ausdehnung nicht gleich ist, so kan auch ihre Masse mit ihrer Ausdehnung nicht gleich sein. Z. B. die
Masse

Die Masse einer eisernen Kugel verhält sich zu der Masse einer andern von eben der Materie wie der Kubikinhalt oder die Ausdehnung der ersten zu der Ausdehnung der zweiten. Man kan aber nicht sagen, daß sich die Masse eines Stück Holzes zu der eines Stück Eisens wie die Ausdehnung des ersten zur Ausdehnung des zweiten verhalte.

§. 3. Die Ruhe (Quies) eines Körpers ist die Verbleibung desselben in einem Orte; Die Bewegung desselben (Motus) ist hingegen die Übersetzung von einem Orte in dem andern.

§. 4. Jeder Körper hat eine Kraft, durch die er sich in dem Stande zu erhalten sucht, in welchen er sich gegenwärtig befindet, und solche wird die Kraft der Trägheit (vis innertiae) genent. Ist also ein Körper in der Ruhe, so verbleibt er so lang in derselben, bis ihn eine andere äussere Kraft daraus bringet, oder in Bewegung sehet; bewegt sich aber derselbe einmal, so dauret auch seine Bewegung so lange fort, bis er von einer äussern Kraft daran verhindert wird. Da ieder Teil der Materie, so klein man ihn auch annehmen wil, eine Kraft der Trägheit besizet, so müssen mehrere zusammen genommen auch eine grössere Trägheit haben, und sie mus folglich mit der Masse in Proportion stehen.

§. 5. Um zwei Kugeln von gleichem Durchmesser aber eine von Eisen, und die andere von Wachs in Bewegung zu sezen, wird die erstere der bewegenden Kraft mehr als die andere widerstehen; wenn sie aber einmal in Bewegung sind, so wird um sie aufzuhalten bei der eisernen mehr Kraft als bei der wächsernen erfordert werden; in beiden Fällen aber wird die bewegende oder hemmen-

mende Kraft bei der einen um so grösser sein müssen, als sie von grösserer Masse als die andere ist.

§. 5. Wenn ein schwerer Körper in seinem Falle gegen dem Mittelpunkt der Erde durch einen andern aufgehalten wird, so behält er sein ganzes Bemühen weiter zu fallen allezeit bei, und übet also einen Druck gegen ihn aus, der seiner Masse proportional ist, und das Gewicht des Körpers genent wird.

Daher kan man also das Gewicht für die Masse oder diese anstaatt ienen brauchen.

Aus diesem Grunde wird der Durchmesser der Stückfugeln aus ihrem Gewichte, oder dieses aus ienem bestimmt.

Da die Erde als eine Kugel angesehen werden kan, und die Richtung der Schwere von dem Umkreise derselben in gerader Linie nach dem Mittelpunkt gehet, so ist iede Linie nach welcher ein unverbinderter Körper dahin fallet, als ein Radius zu betrachten. Geom. §. 12, und weil ieder Radius auf seiner Tangente und auch auf seinen Bogen senkrecht steht, Geom. §. 69. der scheinbare Horizont aber eine Tangent, und der wahre ein Birkelbogen ist, so ist auch die Richtungslinie der Schwere auf beiden senkrecht. Darin ist demnach der Grund enthalten, daß man durch Hülfe eines frei hangenden Senfels erstlich eine eigentliche Perpendikular, und dann zu dieser eine scheinbare Horizontal erhält, wenn sie beiders seits rechte Winkel bekommen.

§. 6. Die Erfahrung lehret, daß alle Körper mit gleicher Geschwindigkeit zum Mittelpunkt der Erde trachten, wenn sie durch nichts verhindert werden.

Wenn

Wenn man die Luft aus einem hohlen gläsernen Cylinder von beträchtlicher Höhe durch die Luftpumpe zieht, und in denselben zwei Kugeln, eine von Blei und die andere von Kork; oder ein Stück Gold und eine Pflaumsfeder zu gleicher Zeit herabfallen läßt, so kommen beide Körper zugleich auf den Boden; geschieht aber dieser Versuch in freier Luft, so zeigt sich ein merklicher Unterschied in der Geschwindigkeit des Falles dieser Körper, weil die Luft einem mehr als dem andern widersteht.

§. 7. Die Körper sind von verschiedener Art, d. i. der Zusammenhang der Materie ist bei einem nicht so wie bei dem andern; und zwar ist

1. Ein dichter Körper dessen Teile so fest zusammen hangen, daß sie ohne besondere äußere Gewalt nicht getrennet werden können. Z. B. Holz, Stein, Metal. u. d. g.

2. Ein flüssiger Körper dessen kleinste Teile einzeln unsichtbar einem jeden Eindruck also bald nachgeben, oder weichen, sich unter sich selbst sehr leicht bewegen, und deren Oberfläche wenn sie in Ruhe ist, allemal wagrecht wird. Z. B. Wasser, Luft, Quecksilber, Del, u. d. g.

3. Ein vollkommen harter Körper ist derienige, dessen Teile so fest zusammen hangen, daß sie auch dem stärksten Stoß oder Drucke nichts nachgeben, und also der Körper seine Figur niemals verändert.

4. Ein vollkommen weicher Körper dessen Teile einem jeden Eindruck weichen, sich aber nicht wieder herstellen können.

5. Ein vollkommen elastischer Körper ist, dessen Figur durch jeden Eindruck verändert, aber mit eben der Kraft, die dem Eindruck gleich ist, also gleich wieder hergestellet wird. Diese Eigenschaft wird die *Schnel- oder Federkraft* (*Elasticitas*) genannt.

Obwohl die Natur weder einen vollkommen harten, weichen oder elastischen Körper darbietet, sondern diese Eigenschaften allezeit so vermischt angetroffen werden, daß nur eine oder die andere in einem größern oder kleinern Grade entdeckt wird, so ist doch nöthig, sich von dem größten Grade derselben einen Begriff zu machen, weil er dienen kan, die Grösse der in den Körpern wirklich vorgefundenen Härte, Weiche, oder Schnelkraft leichter auszumessen, oder mit andern zu vergleichen.

§. 8. Jede Ursache, so eine Bewegung herfürbringt, wird eine *Kraft* (*vis*) oder (*Potentia*) genent; und dasienige, was der Bewegung widerstehet, heisset insgemein die *Last* oder der *Widerstand* (*Pondus, Resistentia*).

§. 9. Wird die Bewegung von einer Kraft wirklich herfürgebracht, so ist solche eine lebendige Kraft (*vis viva*) suchet aber eine Kraft einen Körper nur in Bewegung zu setzen, ohne daß diese wirklich erfolgt, so wird sie eine todte Kraft (*vis mortua*) genent.

§. 10. Das gesamte ungebundene Vermögen einer Kraft (*vis absoluta*) ist iener ganze Nachdruck den sie vermög ihrer natürlichen Beschaffenheit ausüben kan, wenn sie durch nichts verhindert wird.

Das wirkliche Vermögen (*vis respectiva*) hingegen ist nur iener Nachdruck, den eine Kraft, nachdem sie

se durch etwas anderes zum Theil verhindert wird, dennoch ausüben kan.

3. B. Wenn ein Mensch bei einer Arbeit eine so vorteilhafte Leibesstellung nehmen kan, daß er seine ganze Kraft anwenden kan, so ist dieselbe das ungebundene Vermögen, kan er aber wegen einer unbequemen Leibesstellung nicht seine ganze Stärke brauchen, so wird die Kraft so er ausübet, die wirkliche Kraft genent.

§. II. Die Geschwindigkeit ist die Verhältnis des Raumes zu der Zeit, den ein bewegter Körper in einer gewissen Zeit durchläuft. D. i. Wenn der durchlossene Raum $= S$, die Zeit, so dazu nöthig ware $= T$ ist, so wird die Geschwindigkeit $C = \frac{S}{T}$, und

folglich $CT = S$ und $T = \frac{S}{C}$ sein.

Je größer also der Raum ist, den ein Körper in einer gewissen Zeit durchläuft, je größer mus auch seine Geschwindigkeit sein.

Um die Geschwindigkeiten zweener Körper mit einander vergleichen zu können, ist erforderlich, daß man bei beiden gleiche Einheiten sowohl für das Zeitmaas als das Längenmaas des Raums annehme. D. i. Man brauchet bei beiden zum Beispiel zum Zeitmaas Sekunden, und zum Längenmaas Schuhe.

§. 12. Eine gleichförmige Bewegung wird diejenige genent, wenn ein Körper immer mit gleicher Geschwindigkeit bewegt wird; oder wenn die durchlaufenen Räume zu den erforderlich gewesten Zeiten immer gleiche Verhältnisse haben.

§. 13. Eine beschleunigte Bewegung ist, wenn die Geschwindigkeit nach jedem Zeitraume beständig vermehrt wird. Eben so ist eine zurückgehaltene oder gehemte Bewegung, wenn die Geschwindigkeit immer kleiner wird, oder abnimmt, oder wenn sich in einem als andern Falle die Verhältnisse des Raumes zu der Zeit stets ändert.

Wird die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer gleich viel vermehrt, oder vermindert, so wird die Bewegung auch eine gleichförmig vermehrte oder gehemte genent.

Der Anwachs der vermehrten Geschwindigkeit ist also dem Anwachs oder der Vermehrung der Zeit proportional, und in dem letzten Zeitpunkt der Bewegung ist die überkommene Geschwindigkeit des Körpers gleich der anfänglichen mehr so vielen Zuwachsen als sie in den verfloßenen Zeiten erhalten hat. Was man also immer für Zeiteile nimmt, so verhalten sich dieselbe wie die Geschwindigkeiten, die der Körper in denselben erhalten hat.

§. 14. Ein Körper hat eine einfache Bewegung, wenn er nur durch eine Ursach oder Kraft in Bewegung gesetzt wird; hingegen ist seine Bewegung zusammengesetzt, wenn mehrere Kräfte zu gleich und in verschiedenen Richtungen in ihn wirken, daß die Bewegung erfolgt.

In der Folge werden wir sehen, daß man jede einfache Bewegung als eine zusammengesetzte, und umgekehrt diese als eine betrachten kan.

§. 15. Die Kraft der Bewegung ist iene Gewalt, so ein Körper durch die Bewegung überkomt,
 und

und mit welcher er gegen einen ihm widerstehenden Gegenstand wirkt.

Die Erfahrung lehret, daß, wenn zwei Kugeln von gleicher Masse und ungleicher Geschwindigkeit; und zwei andere von ungleicher Masse und gleicher Geschwindigkeit bewegt werden, von den ersten zweien jene, so mehr Geschwindigkeit, von dem andern zweien aber die, so mehr Masse hat, mehr Kraft gegen einen ihnen entgegenstehenden Körper ausübe. Daher ist zu schließen, daß die Kraft der Bewegung eines Körpers sowohl von seiner Masse als Geschwindigkeit abhänge.

Ob man aber die Kraft der Bewegung durch das Produkt der Masse in die Geschwindigkeit, oder in das Quadrat derselben ausdrücken sol, ist unter den Gelehrten noch streitig. Cartesius und fast alle Franzosen sind der erstern Meinung, Leibniz hat zum erstenmal die zwote herfürgebracht, und viele Deutsche und Engländer folgen ihm. Beide haben starke Gründe für und wider sich; wir können uns aber in diese berühmte Streitfrage in diesem Werke nicht einlassen, weil sie uns zu weit von unserer Absicht führen würde. In der Folge werden wir uns zur Ausdrückung der Kraft der Bewegung allezeit des Produkts der Masse in die Geschwindigkeit bedienen, und zwar dieses nicht so viel darum, weil wir in der That für diese Meinung mehr eingenommen sind, als weil ihr heut zu Tage die meiste Gelehrte folgen. Wer hierüber sich mehr erkundigen wil, kan des Abbé Dedier *Mechanic general*, die *Institution de Physic* par Mr. Mairan, les *Elemens de Physic* de Mr. Gravesand, les *Institutions de Physic* par Mad. Chastelet. u. a. m. nachlesen.

Grund-

12 Anfangsgründe der Mechanik.

Grundsätze der Bewegung.

§. 16. Jeder Körper sucht sich in dem Stand zu erhalten, in dem er ist.

Wenn er also in der Ruhe ist, so verbleibt er so lang in derselben, bis er durch eine äussere Ursache daran gestöhret, und in Bewegung gesetzt wird, und ist er einmal in Bewegung, so mus derselbe in der anfangs erhaltenen Richtung und Geschwindigkeit sich so lang fort bewegen, bis ihn eine andere Ursache daran verhindert.

Wenn also ein Körper nur durch eine Kraft allein in Bewegung gesetzt wird, so mus er eine gerade Linie beschreiben, so bald sich aber derselbe in einer krummen Linie bewaget, so müssen zwei oder mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen in ihn würken.

§. 17. Wenn ein Körper in einen andern würket um ihn in Bewegung zu setzen, so widerstehet ihm dieser eben so viel, als iener in ihn würket.

§. 18. Die Würkungen sind ihren Ursachen gleich. D. i. je grösser die Kraft ist, welche einen Körper in Bewegung setzt, je grössere Bewegung wird auch erfolgen.

Mehrere Gesäze der Bewegung werden in der Folge noch vorkommen.

§. 19. Die Wissenschaft, so uns die Bewegung der Körper nach den in der Natur gegründeten Gesäzen beurteilen oder einrichten lehret, wird öfters überhaupt unter dem Wort Mechanik verstanden; insbesondere aber erhält sie diese Benennung, wenn von der Bewegung der festen Körper gehandelt wird; be-
trifft

trifft sie aber die Bewegung der fließigen Körper, sonderlich des Wassers, so heist sie die Hydraulik, und wenn die Luft ihr Gegenstand ist, die Aerometrie. Betrachtet man an den Körpern nur ihr Gleichgewicht gegen einander, so wird diese Wissenschaft bei den festen Körpern die Statik, und bei den fließigen die Hydrostatik genant.

§. 20. Um die Bewegungen in verschiedenen Fällen nach gewissen Absichten einzurichten, bedienet man sich gewisser Rüstzeuge, Maschinen, durch die man entweder an der bewegenden Kraft, oder an der Zeit niemals aber an beiden zugleich gewinnt, oder verliert. Sie werden in die Einfache und Zusammengesetzte eingetheilt. Die erstere bestehen nur aus etwelchen wenigen, die Anzahl der andern aber ist so gros, als die Absichten und ihr Gebrauch verschieden sind, doch wird unter allen keine gefunden, welche nicht aus den Einfachen zusammengesetzt wäre.

Einteilung des gegenwärtigen Wertes :

Erster Abschnitt. Von der Bewegung der festen Körper.

Erstes Hauptstück. Von der einfachen und gleichförmigen Bewegung.

Zweites Hauptstück. Von der zusammengesetzten gleichförmigen Bewegung.

Drittes Hauptstück. Von der zu und abnehmenden Bewegung, oder von dem Falle der Körper sowohl senkrecht als über schiefe Flächen.

Viertes Hauptstück. Von geworfenen Körpern.

Fünftes Hauptstück. Von dem Stosse der Körper.

Sechstes Hauptstück. Von dem Schwerpunkt.

14 Anfangsgründe der Mechanik. Einl.

Zweiter Abschnitt. Von Maschinen.

Erstes Hauptstück. Von einfachen Maschinen.

Zweites Hauptstück. Von zusammengesetzten Maschinen.

Drittes Hauptstück. Von der Reibung der Maschinen.

Dritter Abschnitt. Von dem Gleichgewicht und Druck der fließigen Körper.

Erstes Hauptstück. Von dem Gleichgewicht der fließigen Körper, und ihrem Drucke gegen die Grund und Seitenflächen der Gefäße, in welchen sie enthalten sind.

Zweites Hauptstück. Von eingetauchten festen Körpern in flüssige Materien.

Vierter Abschnitt. Von den Eigenschaften und Kräften der Luft.

Erstes Hauptstück. Von den Eigenschaften der Luft überhaupt.

Zweites Hauptstück. Von dem Gleichgewicht der Luft mit andern fließigen Materien.

Drittes Hauptstück. Von der Bewegung der Luft, und von dem Widerstand, den sie gegen andere in ihr bewegte Körper ausübet.

Fünfter Abschnitt. Von der Bewegung der fließigen Materien, und hauptsächlich des Wassers.

Erstes Hauptstück. Von der Bewegung des Wassers durch seine eigene Schwere.

Zweites Hauptstück. Von der Bewegung des Wassers durch den Druck der Luft.

Drittes Hauptstück. Von dem Stöße des Wassers gegen ihm entgegen gesetzte Flächen.

Viertes Hauptstück. Von einigen Wassermaschinen.



Erster Abschnitt.

Von der Bewegung der festen Körper.

Erstes Hauptstück.

Von der einfachen und gleichförmigen Bewegung.

Lehrsatz.

§. 21.

Die Geschwindigkeiten zweener gleichförmig bewegten Körper verhalten sich wie die durchlofene Räume dividirt durch die Zeiten, so bei der Bewegung verwendet worden.

Beweis: Es sei die Geschwindigkeit des ersten Körpers $= C$; die des andern $= c$; der durchlofene Raum des ersten $= S$, der des andern $= s$; die Dauerzeit der Bewegung des ersten $= T$ und die des andern $= t$.

Da nun die Geschwindigkeit in der gleichförmigen Bewegung allezeit gleich bleibt, §. 12, und dieselbe das Verhältnis des Raumes zu der Zeit ist §. 11.

so ist $C \equiv S : T$, und $c \equiv s : t$, oder vielmehr
 $C \equiv \frac{S}{T}$ und $c \equiv \frac{s}{t}$; folglich ist

$$C : c \equiv \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$$

Z u s a z.

§. 22. Bringet man obige zween Brüche $\frac{S}{T}$ und $\frac{s}{t}$ auf einerlei Benennung nach §. 88. Rechenf. :
 so bekommt man

$$C : c \equiv \frac{St}{Tt} : \frac{sT}{Tt}$$

und folglich ist $C : c \equiv St : sT$, §. 215. Rechenf.
 d. i. die Geschwindigkeiten zweener gleichförmig bewegten Körper stehen in zusammengesetzter Verhältnis der durchlofenen Räume und Zeiten, und zwar in gerader der ersten, und umgekehrter der andern.

3. B. Der in einer Zeit von 8 Sekunden durchlofene Raum eines gleichförmig bewegten Körpers sei $\equiv 152$ Sch., der eines andern in 6 Sekunden $\equiv 96$ Sch.; und die Geschwindigkeit des erstern werde durch die Zahl 76 ausgedrückt, und man verlangte die Geschwindigkeit des andern zu wissen, so kan man sie nach obigen Zusatz finden, denn wenn man die vorige Benennung beibehält, so ist $St : sT \equiv C : c$

$$\text{folglich } \frac{sTC}{St} \equiv c$$

$$\text{d. i. } \frac{96 \times 8 \times 76}{152 \times 6} \equiv 64 \equiv c.$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 23. Multiplicirt man die äussere und mittlere Gasse der obigen Proportion $C : c = St : sT$

so bekommt man $CsT = cSt$,

und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf: $T : t = cS : Cs$, so ist klar, daß die Zeiten in zusammengesetzter Verhältnis der Geschwindigkeiten und Räume, und zwar in umgekehrter der ersten, und in gerader der andern stehen.

Z. B. wenn ein Körper in einer Zeit von 4 Sekunden mit einer Geschwindigkeit wie 12 einen Raum von 62 Sch. durchläuft, und ein anderer wird mit einer Geschwindigkeit wie 8 auf 40 Sch. getrieben, und man verlangt die Zeit, so dieser Körper zur Bewegung brauchen wird, zu wissen, so ist nach obiger Benennung

$$cS : Cs = T : t$$

$$\text{und } \frac{CsT}{cS} = t$$

$$\text{d. i. } \frac{12 \times 40 \times 4}{8 \times 62} = 3 \frac{27}{31} = t.$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 24. Zerleget man obige Gleichung $CsT = cSt$ in folgende Proportion, $S : s = CT : ct$, so erhellet, daß die Räume in zusammengesetzter gerader Verhältnis der Geschwindigkeiten und Zeiten sind.

Z. B. Wenn ein Körper mit einer Geschwindigkeit wie 16 auf 200 Sch. in 6 Sekunden gelanget, ein anderer aber mit einer Geschwindigkeit wie 12 nur 4 Sekunden bewegt wird, wie weit wird er sich in dieser Zeit bewegen?

Weil nach obiger Benennung $CT : ct = S : s$

und $\frac{ctS}{CT} = s.$

Es ist $\frac{12 \times 4 \times 200}{16 \times 6} = 100 \text{ Sch.} = s.$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 25. Nimmt man an, daß in der Proportion $C : c = St : sT$ die Geschwindigkeiten gleich, d. i. daß $C = c$ sei, so sind auch $St = sT$ §. 206. Rechenk. und diese Gleichung in eine Proportion aufgelöst, giebt.

$$S : s = T : t.$$

D. i. Wenn zweien gleichförmig bewegte Körper gleiche Geschwindigkeiten haben, so verhalten sich ihre durchlofene Räume wie die Zeiten.

B. B. Zwei Truppen marschiren mit gleicher Geschwindigkeit gegen einem Orte; die erste ist 600 Schritte entfernt, und braucht 10 Minuten um dahin zu kommen, die andere aber hat nur 250 Schritte zu machen; man verlangt zu wissen wie viel Zeit sie nöthig haben wird?

Weil also vermög der Bedingung die Geschwindigkeiten beider Truppen gleich sind,

so ist $S : s = T : t$

und folglich $\frac{sT}{S} = t$

oder $\frac{250 \times 10}{600} = 4\frac{1}{2} \text{ Minuten} = t.$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 26. Wären in der Proportion $S : s = CT : ct$ $S = s$, so würde auch $CT = ct$ sein §. 206. Rechenk.

Von der einfachen u. gleichförmig. Beweg. 19

hent. und wird diese Gleichung in folgende Proportion $C : c = t : T$ aufgelöst, so siehet man, daß, wenn in der gleichförmigen Bewegung zweener Körper die Räume gleich sind, die Geschwindigkeiten in verkehrter Verhältniß der Zeiten stehen.

B. B. zwei Truppen sind gleichweit von einem Orte entfernt; die erste marschirt in 15 Minuten dahin, indem sie 50 Schritte in einer Minute macht; die andere aber macht in einer Minute 60 Schritte, wie viel wird sie also Zeit nöthig haben, um dahin zu kommen? Weil die Entfernungen beider Truppen gleich sind, und man ihre in einer Minute gemachten Schritte als ihre Geschwindigkeiten ansehen kan,

so ist $C : c = t : T$

$$\text{und } \frac{CT}{c} = t$$

$$\text{d. i. } \frac{50 \times 15}{60} = 12\frac{1}{2} = t.$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 27. Wenn in der Proportion $T : t = cS : Cs$ die ersten zween Größe $T = t$, so sind es auch die andere zween $cS = Cs$, und löset man sie in folgende Proportion auf,

$$S : s = C : c$$

so erhellet, daß, wenn in der gleichförmigen Bewegung die Zeiten gleich sind, sich die Räume wie die Geschwindigkeiten verhalten.

B. B. zwei Truppen sollen zu gleicher Zeit in einem Orte, der von der ersten 780, und von der zwoten 420 Schritte entfernt ist, eintreffen; die erste macht in einer Minute 66

Schritte; man fragt wie viele Schritte die andere in der nemlichen Zeit zu machen habe?

Da nun nach obiger Benennung $S : s = C : c$

$$\text{so ist } \frac{sC}{S} = c \quad \text{oder} \quad \frac{420 \times 66}{780} = 35 \frac{7}{13} = c$$

Sind übrigens in der gleichförmigen Bewegung so wohl die durchlofene Räume, als auch ihre Geschwindigkeiten gleich, so müssen es auch die Zeiten sein. Sind die Räume und Zeiten gleich, so sind es auch die Geschwindigkeiten, und wären die Geschwindigkeiten und Zeiten gleich, so würden es auch die Räume sein.

L e h r s a t z.

§. 28. Die Kräfte der Bewegung zweener gleichförmig bewegten Körper stehen in einer zusammengesetzten Verhältniß ihrer Geschwindigkeiten und Massen.

Beweis: Wenn man die Kraft der Bewegung des ersten Körpers mit Q , seine Masse mit M , und die Geschwindigkeit mit C , die Kraft des andern mit q , seine Masse mit m , und seine Geschwindigkeit mit c benennet, so ist

$$Q = MC, \text{ und } q = mc$$

und also $Q : q = MC : mc$.

Z u s a t z.

§. 29. Nimt man die Geschwindigkeiten $C = c$ an, so ist $Q : q = M : m$. §. 215. Rechenk. d. i. wenn die Geschwindigkeiten gleich sind, so verhalten sich die Kräfte der Bewegung wie die Massen. Geßet man aber voraus, daß die Massen gleich, so ist $Q : q = C : c$, oder die Kräfte verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.

Zus

Von der einfachen u. gleichförmig. Beweg. 21

Z u s a z.

§. 30. Im Falle die Kräfte der Bewegung zweier Körper gleich wären, d. i. wenn $Q = q$ so ist auch $MC = mc$ §. 215. Rechenk. und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, $M : m = c : C$, so erhellet, daß die Massen in verkehrter Verhältniß der Geschwindigkeiten stehen.

Die Anfänger werden einsehen, daß man obstehende Proportion noch vielmal verändern könne, wenn man anstatt der Geschwindigkeiten die ihnen gleiche Verhältnisse $\frac{S}{T} : \frac{s}{t}$ sezet. Wir übergehen sie daher mit Stillschweigen.

Ubrigens, obwohl in der Natur der Schärfe nach vielleicht keine ganz gleichförmige Bewegung staet findet, so kan man doch die ungleichförmige in sehr kleinen Zeiten ohne merklichen Fehler als gleichförmig betrachten; so wie man in der Geometrie einen Zirkel öfters als ein Polygon von unendlich vielen Seiten ansiehet.

Zweites Hauptstück.

Von der zusammengesetzten gleichförmigen Bewegung.

Grundsätze.

I.

§. 31. Wenn zwei Kräfte in einem Körper zugleich und nach einerlei Richtung würden, so ist ihre

gesamte Wirkung der Summe der Kräfte gleich, und der Körper wird sich nach der nehmlichen Richtung bewegen.

Z. B. Wenn zween Männer eine Last an einem Stricke nach einerlei Richtung ziehen, so werden sie eine so grosse Last miteinander bewegen, als die Summe zweer Lasten ist, die ieder insbesondere bewegen könnte.

2.

Wenn zwei gleiche Kräfte in einen Körper nach entgegengesetzten Richtungen wirken, so heben sie sich ganz auf, und der Körper verbleibt in Ruhe.

Z. B. Wenn ein Man eine Last an einem Stricke zieht, und ein anderer von gleicher Stärke eben so viel nach der entgegengesetzten Seite zieht, so wird einer des andern seine Kraft vernichten, und der Körper in Ruhe bleiben.

3.

Wenn zwei ungleiche Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirken, so hebt sich die kleinere ganz auf; die grössere aber wird um so viel kleiner, als die kleinere betragen hat, und der Körper bewegt sich alsdenn nach der Richtung der grössern.

Z. B. Wenn drei Männer nach einer Richtung an einem Stricke ziehen, und nur einer entgegenhält, so wird die Kraft des letztern ganz aufgehoben, die Kraft der drei Männer aber ist alsdenn nur so gross als die von zween, und diese werden den einen nach sich ziehen.

Lehr.

Lehrsatz.

§. 32. Wenn die Richtungslinien AB und AC Fig. I.
zwoer mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einen Körper A wirkenden Kräften P und Q was immer für einen Winkel BAC machen, so folget der bewegte Körper keiner von beiden Richtungen, sondern beschreibt die Diagonal AD eines Parallelograms ACDB, dessen Seiten AB und AC die Räume vorstellen, so der Körper von ieder Kraft allein bewegt in einer gewissen Zeit durchläufe.

Beweis: Theilet die Räume AB und AC ieden in eine gleiche Anzahl Teile, und setzet dieselbe als die Räume an, die der Körper von einer Kraft allein getrieben in unendlich kleinen Zeiten durchlaufen würde. Ferner ziehet aus den Theilungspunkten EFGB zu AC, und aus HILC zu AB Parallelen, und betrachtet, daß der Körper A durch die Kraft P allein bewegt, nach der ersten unendlich kleinen Zeit in E, nach der zwoten in F, nach der dritten in G, und nach der vierten in B sein würde; und wenn er durch die Kraft Q allein getrieben würde, so müste sich derselbe nach der ersten Zeit in H, nach der zwoten in I, nach der dritten in L, und nach der vierten in C befinden. Da wir nun annehmen, daß beide Kräfte zugleich in ihn würden, so wird er nach der ersten Zeit durch die Kraft Q von der Richtung AB um $AH = EM$, nach der zwoten um $AI = FN$, nach der dritten um $AL = GO$, und nach der vierten um $AC = BD$ abgetrieben werden; eben so bringt ihn die Kraft P von der Richtung AC nach der ersten Zeit um $AE = HM$, nach der zwoten um $AF = IN$, nach der dritten um $AG = LO$, und nach der vierten um $AB = CD$ ab; folglich wird sich der Körper nach der ersten Zeit in

B 4 M,

M, nach der zweiten in N, nach der dritten in O, und nach der vierten in D. befinden; diese Punkten aber sind auf der Diagonal AD des Parallelograms ACDB, dessen Seiten die durchlofenen Räume der einzelnen Kräften vorstellen, also wenn die Richtungslinien zweier mit gleichförmiger Geschwindigkeit wirkenden Kräften einen Winkel machen, so folget der bewegte Körper keinen der beiden Richtungslinien, sondern beschreibt die Diagonal des Parallelograms ACDB, dessen Seiten die Räume der einzelnen Kräften vorstellen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 33. Da die Diagonal AD den Raum vorstellet, welchen der Körper A von den zwei zusammengesetzten Kräften getrieben durchlaufen wird, und dieselbe ^{halb} grösser als jede der Seiten AB oder CD des Parallelograms, aber doch kleiner als ihre Summe ist, so folget, daß der Körper von den zusammengesetzten Kräften getrieben einen ^{halb} größern Raum als durch eine allein, aber auch einen kleinern, als wenn er durch beide Kräften nach einerlei Richtung ^{nach einerlei} bewegt würde, durchlaufen müsse. Es mus sich daher bei nach verschiedenen Richtungen zusammengesetzten Kräften ein Teil derselben verlieren, oder aufheben, ^{was man auf der / BAC} ^{bezeichnen ist.}

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 34. Weil der Körper A durch die zusammengesetzten Kräften P und Q in der nehmlichen Zeit den Raum AD durchläuft, als er von einer Kraft allein getrieben den Raum AB oder AC durchlief, so verhält sich die von der einfachen Kraft P oder Q erlangte Geschwindigkeit zu der durch die Zusammensetzung derselben überkommenen, wie die durchlofenen Räume §. 27. d. i. wenn die Geschwindigkeit von der Kraft $P = C$,
die

Von d. zusammenges. gleichförm. Bewegung. 25

die von $Q = c$, und die von den zusammengesetzten Kräften $= X$ wäre, so ist

$$C : X = AB : AD$$

$$\text{und } c : X = AC : AD,$$

Man kan also die Seiten und die Diagonal des Parallelograms als die Verhältnisse der Geschwindigkeiten ansehen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 35. Je spitziger der Winkel BAC ist, den die Richtungslinien der zusammengesetzten Kräfte machen, je länger wird auch die Diagonal AD des Parallelograms, und folglich je weiter wird auch der Körper durch die zusammengesetzte Kräfte getrieben, oder um so größere Geschwindigkeit erhält er. Je stumpfer aber der Winkel BAC ist, je kürzer wird die Diagonal; der Körper durchläuft in solchem Falle einen um so kleinern Raum, und seine Geschwindigkeit wird um so geringer.

Fig. 2.
und 3.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 36. Da die Wirkung zweier Kräfte durch die Diagonal ausgedrückt werden kan, so lassen sich zwei zusammengesetzte Kräfte als eine, oder diese als aus zweien zusammengesetzt betrachten.

A u f g a b e.

§. 37. Wenn der Winkel der Richtungslinien zweier Kräfte nebst dem Raume, den der von ieder Kraft insbesondere getriebene Körper durchlaufen würde, gegeben, wie der Raum zu finden, den er durch diese zwei Kräfte zugleich getrieben beschreiben wird?

Fig. 1. 2. Auflösung: I. Zeichnet den gegebenen Winkel BAC der Richtungslinien; machet AB und AC den gegebenen Räumen gleich, welche der Körper durch jede Kraft allein durchlaufen würde, ziehet $CD=AB$ parallel zu AB, und auch die Diagonal AD.

2. Ist nun der Winkel $BAC=90^\circ$ so ist $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$. Geomet. §. 182.

folglich $\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2} = AD$. §. 183. Geom.

3. Ist aber der Winkel BAC spitzig, oder stumpf, so beschreibet das Parallelogram wie zuvor, und betrachtet, daß auch der Winkel BAC gegeben, und $BAC + ACD = 180^\circ$ §. 54. Geomet. folglich $180^\circ - BAC = ACD$ sei. Da nun auch $CD=AB$ ist, so kennet ihr in dem Dreiecke ACD die zwei Seiten AC und CD samt dem dazwischen begriffenen Winkel, folglich findet ihr die Seiten AD als den verlangten Raume §. 440. Geomet.

Stellen die Linien AB und AC die Geschwindigkeiten vor, so erhält man die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Kraft auf die nehmliche Art.

A u f g a b e.

§. 38. Wenn mehrere Kräfte zugleich und in verschiedenen Richtungen auf einen Körper würden, wie dessen andurch erhaltene Richtung sowohl als seine Geschwindigkeit, oder der Raum den er durchlaufen wird, zu bestimmen?

Fig. 4. Auflösung: I. Setzt die gegebene Richtungslinien AB, AD, AF und AH in den Winkeln zusammen als sie auf den Körper würden, und gebet denselben die
Länge

Von d. zusammenges. gleichförm. Bewegung. 27

Länge des Raumes oder der Geschwindigkeit, so von jeder einzelnen Kraft beschrieben, oder hervorgebracht wird.

2. Ziehet BC parallel zu AD und CD zu AB , so stellet die Diagonal AC die Richtung vor, so aus den zwei einfachen Kräften AB und AD erfolgt; d. i. wenn AB , und AD die Räume oder Geschwindigkeiten der einzelnen Kräfte vorstellen, so ist AC der Raum oder die Geschwindigkeit der zwei zusammengesetzten §. 32.

3. Ziehet FG parallel zu AH , und HG zu AF , so ist die Diagonal AG die Richtung, so aus der Zusammensetzung der zwei einfachen AF und AH erfolgt, und wenn AF und AH die Räume oder Geschwindigkeiten der einzelnen Kräfte vorstellen, so ist auch AG der Raum oder die Geschwindigkeit der zwei zusammengesetzten Kräfte. §. 32., und man kan also die vier gegebenen Richtungen, Räume oder Geschwindigkeiten als zwei, nemlich als AC und AG betrachten.

4. Ziehet CE parallel zu AG , und EG zu AC , so ist die Diagonal AE die Richtung, der Raum, oder die Geschwindigkeit der zwei zusammengesetzten AC und AG §. 32. oder vielmehr von allen vieren gegebenen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 39. Wolte man die Diagonal AE berechnen, so hat man erstlich AC und AG , und denn aus beiden AE nach §. 37. zu suchen.

A u f g a b e.

§. 40. Wenn mehrere Kräfte, deren Richtungslinien in verschiedenen Flächen liegen, in einen Körper wirken, wie die dadurch erhaltene Richtung sowohl,
als

als der Raum oder die erlangte Geschwindigkeit zu finden?

Fig. 5. Auflösung: Es sei, daß der Körper A nach den drei in verschiedenen Flächen liegenden Richtungen AC, AD und AB zugleich getrieben werde, so beschreibt erstlich mittelst den zwei Richtungen AC und AD das Parallelogramm ACED um die Diagonal AE zu erhalten. Ferner beschreibt mit den zwei Richtungslinien AE und AB das Parallelogramm AEFB, so ist die Diagonal AF die verlangte Richtung, und drückt entweder den Raum oder die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Kraft aus, nachdem die Seiten des Parallelogramms eines oder das andere vorstellen. §. 33.

Lehrsatz.

Fig. 6. §. 41. Die zusammengesetzte Kraft AH verhält sich zu einer der einfachen AB, wie der Sinus BX des Winkels BAC zum Sinus DS des Winkels CAH, und die zwei einfache Kräfte AB und AC verhalten sich zu einander wechselweise wie die Sinusse BO und DS der Winkel BAH und CAH, die ihre Richtungslinien BA und CA mit der Diagonal AH machen.

Beweis: Die Geschwindigkeiten, so durch AB, AC und AH vorgestellt werden, verhalten sich wie die Räume §. 27., und da die Masse des Körpers A beständig die nämliche verbleibt, so sind auch die Kräfte wie die Geschwindigkeiten, oder Räume §. 29. D. i. wie die Seiten des Dreiecks ACH, weil $AB = CH$; die Seiten dieses Dreiecks aber verhalten sich wie die Sinusse ihrer entgegenstehenden Winkel, also verhalten sich auch die Kräfte wie die Sinusse der ihnen entgegenstehenden Winkel; d. i. die Kraft AH ist zu AB oder CH, wie der Sinus HY des Winkels ACH

Von d. zusammenges. gleichförm. Bewegung. 29

ACH zum Sinus BS des Winkels CAH. Nun aber ist der Sinus HY des Winkels ACH gleich dem Sinus BX des Winkels BAC, weil er das Komplement auf 180° ist; also ist auch

$$AH : AB \text{ oder } CH = \text{Sin. BX von BAC} : \text{Sin. CS von CAH.}$$

Nicht minder ist :

$$AH : AC \text{ oder } BH = \text{Sin BX von BAC} : \text{Sin BO von BAH.}$$

Endlich weil :

$$AH : CH = \text{Sin BX von BAC} : \text{Sin BS von CAH.}$$

Und :

$$AH : AC = \text{Sin BX von BAC} : \text{Sin von AHC} \\ = \text{Sin BO von BAH}$$

so ist auch

$$AC : CH \text{ oder } AB = \text{Sin BO von BAH} : \text{Sin BS von CAH.}$$

Drittes Hauptstück.

Von der zu- und abnehmenden Bewegung,
oder von dem Falle der Körper sowohl
senkrecht als über schiefe Flächen.

Lehrsatz.

§. 42. In der gleichförmig zunehmenden oder beschleunigten Bewegung verhalten sich die durchlofenen Räumen wie die Quadrate der Zeiten, die dazu verwendet werden,

Raum dem Parallelogram $AEXN$ gleich. §. 12. bewegt sich derselbe aber mit gleichförmig beschleunigter Bewegung in der nemlichen Zeit AE , und erhält am Ende derselben die Geschwindigkeit EX , so ist sein durchlofener Raum dem Dreieck AEX gleich. Da aber letzteres nur die Hälfte von dem erstern ist, so wird auch ein gleichförmig bewegter Körper einen doppelt so grossen Raum beschreiben, als einer in der nemlichen Zeit mit gleichförmig beschleunigter Bewegung dessen Geschwindigkeit am Ende der Bewegung eben so gross wie die vorige wäre; thun würde.

Lehrsatz.

§. 45. Die mit gleichförmig beschleunigter Bewegung in gleichen auf einander folgenden Zeiten durchlofenen Räume wachsen wie die ungerade Zahlen 1. 3. 5. 7. u. s. w.

Beweis: Der in der ersten Zeit AB durchlofene Raum ist $= ABL$, der in der zwoten samt der ersten oder AC ist $= ACO$, und der in der dritten samt der ersten und zwoten oder AD ist $= ADI$ §. 42. ziehet man nun den in der ersten Zeit der Bewegung durchlofenen Raum ABL von dem von Anfang der Bewegung bis zum Ende der zwoten Zeit durchlofenen oder von ACO ab, so verbleibt der in der zwoten Zeit allein durchlofene Raum oder das Trapezium $BCOL$ übrig, und ziehet man den in der ersten und zwoten Zeit durchlofenen Raum ACO von dem von Anfang der Bewegung bis zum Ende der dritten Zeit durchlofenen Raum ADI ab, so verbleibt der in der dritten Zeit allein durchlofene Raum oder das Trapezium $CDIO$ übrig. Nimmt man nun das Dreieck ABL wie 1 an, so ist klar, daß das Trapezium $BCOL$ wie 3, und das Trapezium $CDIO$ wie 5 ist, indem sie wirklich
aus

Von der zu- und abnehmenden Bewegung. 33

aus so vielen Dreiecken wie das erste ist, bestehen. Diese Trapezien aber stellen die Räume der aufeinander folgenden Zeiten vor, also wachsen die in gleichen aufeinander folgenden Zeiten durchlofenen Räume wie die ungerade Zahlen 1. 3. 5. 7. u. f. w.

Alles was wir bisher von der gleichförmig beschleunigten Bewegung erwiesen haben, läßt sich auch auf die gleichförmig gehemte aber nur in umgekehrter Ordnung anwenden.

Er f a h r u n g.

§. 46. Ein schwerer Körper der ungehindert gegen dem Mittelpunkte der Erde fallet, hat eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Ursache hievon ist, weil seine Schwere ihm alle Augenblick einen neuen Grad der Geschwindigkeit beibringt, und folglich solche in gleichen Zeiten gleichmäßig vermehrt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 47. Alles also, was wir von der gleichförmig beschleunigten Bewegung erwiesen haben; hat auch seine Beziehung auf den freien Fall der schweren Körper gegen den Mittelpunkt der Erde. D. i. die durchfallenen Räume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, oder der Geschwindigkeiten; die Zeiten oder Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Räume; die Räume wachsen in gleichen aufeinander folgenden Zeiten wie die ungerade Zahlen 1. 3. 5. 7. u. f. w.

Der berühmte Naturkündiger Galilæus war der erste, der über den Fall der schweren Körper ordentliche Versuche anstellte; dem wir folglich dieses Gesetz der Bewegung zu verdanken haben.
Unterb. Mechanik. IV. Th. 2. Da

Da aber so wohl er, als seine Nachfolger diese Versuche nur in respektive kleinen Höhen vornehmen konnten, so ist man bis iho noch nicht vollkommen versichert, ob die Vermehrung der Geschwindigkeit auch bei grössern Höhen nach eben dem Gesetze geschieht?

Erfahrung.

§. 48. Durch genau angestellte Versuche weist man, daß ein schwerer frei und ungehindert fallender Körper in der ersten Sekunde 15 Schuhe 1 Zoll und $\frac{1}{18}$ Linie Parisetmaass herunter falle; weil aber die Luft einige Verhinderung macht, so nimt man insgemein an, daß der Fal in der ersten Sekunde nur 15 Schuh tief sei.

Aufgabe.

§. 49. Ein Körper braucht 4 Sekunden um über eine Höhe frei herab zu fallen, man fragt, wie groß die Höhe wäre?

Auflösung: Vermög §. 48. fällt ein Körper in der ersten Sekunde 15 Schuh, und vermög §. 42. verhalten sich die durchfallene Räume wie die Quadrate der Zeiten. Derowegen ist:

$$1 : 16 = 15 : x$$

$$\text{und } \frac{16 \times 15}{1} = 240 \text{ Sch.} = x \text{ der Höhe.}$$

Aufgabe.

§. 50. Man verlangt zu wissen, in wie viel Zeit ein Körper von einer gegebenen Höhe frei fallen werde?

Auf.

Von der zu- und abnehmenden Bewegung. 35

Auflösung: Es sei die gegebene Höhe = 450 Schuh; nebst dem ist bekannt, daß ein Körper in der ersten Sekunde 15 Schuh fällt. §. 48. Da sich nun die Zeiten wie die Quadratwurzeln der Räume verhalten, §. 43:

so ist $\sqrt{15} : \sqrt{450} = 1 \text{ Sek. } x$
oder wenn man das Maas der Räume in Linien zerfällt, und die Wurzeln wirklich ausziehet:

$$46 : 254 = 1 : x$$

$$\text{und } \frac{254}{46} = 5 \frac{12}{23} \text{ Sekunden} = x.$$

oder man setzet: wie sich die Höhe, die der Körper in der ersten Sekunde durchfällt zu der gegebenen Höhe verhält, eben so verhält sich das Quadrat von einer Sekunde zu dem Quadrat der gesuchten Zeit §. 42. wo man alsdann aus dem vierten Satze die Wurzel ausziehen hat.

Eben auf diese Art würde man beide Aufgaben auflösen können, wenn anstatt der Zeit die Geschwindigkeit des fallenden Körpers gegeben, oder gesucht würde:

Lehrsatz:

§. 51. Ein Körper, der durch was immer für eine Kraft senkrecht in die Höhe getrieben wird, erhält eine gleichförmig gehemte Bewegung, wenn die Luft keine Hindernis macht.

Beweis: Betrachtet das die Schwere des Körpers der treibenden Kraft gerade, und beständig entgegen wirkt, und weil diese Wirkung immer gleich stark ist, so mus auch die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich viel abnehmen, und also nothwendig eine gleichförmig gehemte Bewegung entstehen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 52. Wenn also ein Körper senkrecht in die Höhe getrieben wird, und anfangs eine gewisse Geschwindigkeit durch die treibende Kraft erhält, so wird dieselbe wie die Zeiten zunehmen, abnehmen, und endlich gänzlich aufhören; der Körper wird alsdann einen Augenblick gleichsam in der Ruhe zu sein scheinen, weil die treibende Kraft damals ganz überwunden ist. In eben diesen Augenblick aber wirkt die Schwere allein in ihn, und sucht denselben wieder abwärts zu treiben. Die Geschwindigkeit nimmt alsdann wieder eben so zu, wie sie beim Aufsteigen abgenommen hat, und wenn der Körper in dem Ort, wo seine steigende Bewegung angefangen hat, gekommen ist, so ist seine wieder erlangte Geschwindigkeit bei nahe wieder eben so groß, als sie zu vor durch die treibende Kraft war. (Ich sage mit Recht bei nahe, weil sie durch den Widerstand der Luft allezeit etwas geringer befunden wird, als sie vermög diesem Gesetze sein sollte) daher werden die verlorenen Geschwindigkeiten wie die Zeiten; die noch zu durchlaufenden Räume bis zur größten Höhe wie die Quadrate der noch vorhandenen Geschwindigkeiten, oder der noch nöthigen Zeiten sich verhalten, ferner die in einzeln aufeinander folgenden Zeiten durchlofenen Räume oder erreichten Höhen werden wie die ungeraden Zahlen abnehmen. Endlich wird ein senkrecht in die Höhe getriebener schwerer Körper nur die Hälfte so hoch steigen, als er stiege, wenn er mit der anfänglich erhaltenen Geschwindigkeit gleichförmig bewegt würde, oder wenn die Schwere seine Bewegung nicht hemte.

E r f a h r u n g.

§. 53. Zween freifallende Körper von ungleichen Massen durchlaufen, wenn ihnen die Luft gleich viel,
oder

Von der zu- und abnehmenden Bewegung. 37

oder gar nicht widersteht, in gleichen Zeiten gleiche Räume.

Eine hundert pfündige Bombe würde also in einem luftleeren Raume in einer Zeit z. B. von 2 Sekunden eben nicht tiefer als eine dreipfündige Granaden, oder hölzerne Kugel fallen. Wird dieser Versuch in der freien Luft angestellt, so zeigt sich zwar an den in gleichen Zeiten durchfallenen Räumen einiger Unterschied, er ist aber dem Unterschied der Massen nicht proportionirt, sondern viel kleiner. Es ist daher klar, daß er nicht von der Verschiedenheit der Massen, sondern von dem Widerstand der Luft herrührt.

Z u s a z.

§. 54. Weil die Geschwindigkeiten sich wie die Zeiten verhalten, so werden zween freifallende Körper von ungleichen Massen in gleichen Zeiten auch gleiche Geschwindigkeiten erhalten, und wenn sich in der freien Luft einiger Unterschied zeigt, so kommt derselbe von dem Widerstand der Luft, keineswegs aber von der Verschiedenheit der Masse her.

Lehrsatz.

§. 55. Die durch den Falle erlangten Kräfte eines Körpers verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Höhen.

Beweis: Es sei die Masse des Körpers $= M$; eine Tiefe seines Falles $= S$, und die andere $= s$; die in der ersten erlangte Geschwindigkeit $= C$, und die in der andern $= c$.

Nun betrachtet, daß $MC : Mc = C : c$ §. 29.

nicht minder ist $C : c = \sqrt{S} : \sqrt{s}$ §. 43.

§ 3

also

also ist auch $MC : Mc = \sqrt{s} : \sqrt{s}$. §. 204. Rechenkunst.

Z u s a z.

§. 56. Um also die Kraft der Bewegung, so ein freifallender Körper in einer gewissen Höhe erhalten, auszudrücken, muß man sein Gewicht, oder Masse durch die Quadratwurzel der durchfallenen Höhe multipliciren.

* Es versteht sich von selbst, daß man um die Kraft der Bewegung eines freifallenden Körpers zu bestimmen, nach der leibnizischen Meinung das Gewicht oder die Masse durch die Höhe selbst multipliciren müsse.

Erklärung.

§. 57. Wenn eine Fläche mit dem Horizont einen Winkel machet, so wird sie eine schief liegende Fläche genent.

Beobachtung.

§. 58. Ein schwerer Körper bewegt sich langsamer über eine schief liegende Fläche, als wenn er frei und senkrecht von der nemlichen Höhe herab fiel.

Z u s a z.

§. 59. Es muß also die Schwere bei dem Falle eines Körpers über eine schiefe Fläche ihre ganze Wirkung nicht machen können, sondern ein Teil derselben gleichsam verloren gehen, oder in die Fläche selbst wirken.

Beobachtung.

§. 60. Die Geschwindigkeit eines über eine schief-
liegende Fläche herablaufenden Körpers nimmt allezeit
mehr und mehr zu.

Z u s a z.

§. 61. Da das Zunehmen der Geschwindigkeit eines
über eine schiefliegende Fläche fallenden Körpers von
keiner andern Ursache als von der Schwere herkommen
kan, und diese, so als wenn er senkrecht herabfiel,
alle Augenblick in ihn würfet, und demselben bestän-
dig neue und gleiche Grade der Geschwindigkeit bei-
bringt §. 46. so mus derselbe nothwendig eine gleich-
förmig vermehrte Bewegung erhalten.

Z u s a z.

§. 62. Alles, was von dem freien und senkrech-
ten Falle der Körper erwiesen worden, hat also auch
seine Beziehung auf den Fall derselben über schief-
liegende Flächen: d. i. die auf der schiefen Fläche durch-
lossene Räume verhalten sich wie die Quadrate der
Zeiten, oder Geschwindigkeiten; und diese wie die Qua-
dratwurzeln der Räume. Die Räume wachsen in glei-
chen aufeinander folgenden Zeiten wie die ungerade
Zahlen 1. 3. 5. 7. 9. u. s. w.

Z u s a z.

§. 63. Eben wie ein über eine schiefliegende Fläche
fallender Körper eine gleichförmig vermehrte Bewe-
gung erhält, so erhält er eine gleichförmig gehemte,
wenn er über eine schiefliegende Fläche durch eine Kraft
hinauf bewegt wird. Folglich läst sich hier eben das,
was §. 51. u. s. w. gesagt worden, auf gleiche Art
anwenden.

Erklärung.

§. 64. Das ungebundene Vermögen der Schwere (Gravitas absoluta) ist dasjenige, welches der Körper, wenn er senkrecht und frei herabfällt, ausübt. Das wirkliche Vermögen der Schwere aber (Gravitas respectiva) ist jenes, welches er noch hat, wenn seine Schwere zum Teil verhindert wird ihre ganze Wirkung zu machen. Z. B. wenn der Körper über eine schief liegende Fläche fällt.

Lehrsatz.

§. 65. Die Geschwindigkeit, welche ein senkrecht fallender Körper am Ende seines Falles erreicht, verhält sich zur Geschwindigkeit, die er über eine schief liegende Fläche fallend erhält, wie die Länge der schief liegenden Fläche zu ihrer Höhe.

Fig. 8. Beweis: Wenn man aus dem Schwerpunkte A des fallenden Körpers eine Perpendikular AC auf CF zieht, dieselbe als das ungebundene Vermögen der Schwere oder als die Kraft des Körpers, welche er durch seinen senkrechten Fall erhält, ansieht, und sie in zwei andere Kräfte, wovon eine auf die schiefe Fläche perpendicular wie AD oder BC, die andere AB aber zu derselben parallel ist, zerlegt, §. 36. so wird die Kraft der Schwere, mit welcher der Körper gegen die schiefe Fläche wirft, und an derselben gleichsam verloren geht, durch AD, die Kraft aber, welche noch übrig bleibt, und mit welcher der Körper wirklich über die schiefe Fläche lauft, durch AB ausgedrückt, und es verhält sich das ungebundene Vermögen der Schwere, welches der Körper senkrecht fallend hätte, zu dem wirklichen Vermögen oder zu der Kraft, mit der er über die schief liegende Fläche fällt, wie AC:AB. Nun
aber

Von der zu- und abnehmenden Bewegung. 41

aber ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und EFC : $AC : AB = CE : EF$, D. i. die Kraft des senkrecht fallenden Körpers verhält sich zu der, so er über eine schiefe Fläche fallend erhielte, wie die Länge der schief liegenden Fläche zu ihrer Höhe, und da die Masse des Körpers die nehmliche zu sein angenommen wird, so sind die Kräfte wie die Geschwindigkeiten §. 29. Also verhält sich auch die Geschwindigkeit, welche ein senkrecht fallender Körper am Ende seines Falles erreicht, zur Geschwindigkeit, die er über eine schiefe Fläche fallend erhielte, wie die Länge der Fläche zu ihrer Höhe.

Z u s a z.

§. 66. Siehet man CE als den Sinus Totus, und EF als den Sinus des Winkels, den die schief liegende Fläche mit dem Horizont macht, an, so kan man auch sagen, daß die Geschwindigkeit eines senkrecht gefallenen Körpers zu der Geschwindigkeit, die er über eine schiefe Fläche von eben der Höhe erhielte, sich wie der Sinus Totus zum Sinus des Winkels, welchen die schiefe Fläche mit dem Horizont macht, verhalte.

Lehrsatz.

§. 67. Der beschriebene Raum eines senkrecht fallenden Körpers verhält sich zu dem Raume eines in der nehmlichen Zeit über eine schiefe Fläche ~~laufenden~~ ^{fallenden} Körpers wie die Geschwindigkeit des erstern zu der des andern.

Beweis: Wenn sowohl der senkrecht als der über eine schiefe Fläche fallende Körper im Anfange seiner Bewegung die Geschwindigkeit, so er durch die beschleunigte Bewegung am Ende seines Falles erhalten, gehabt

habt hätte, so würde er in der nehmlichen Zeit mit dieser Geschwindigkeit mit gleichförmiger Bewegung einen doppel so grossen Raum beschreiben, §. 44. Nun aber verhalten sich in der gleichförmigen Bewegung die Räume wie die Geschwindigkeiten, wenn die Zeiten gleich sind §. 27. also verhalten sich auch die doppelte und folglich auch die einfache Räume wie die am Ende des Falles erlangte Geschwindigkeiten, und also ist der beschriebene Raum eines senkrecht fallenden Körpers zu dem Raum eines in der nehmlichen Zeit über eine schiefe Fläche laufenden wie die Geschwindigkeit des ersten zu der des andern.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 68. Da sich die Geschwindigkeit eines senkrecht fallenden Körpers zu der Geschwindigkeit eines über eine schiefe Fläche laufenden wie $AC : AB$ oder auch wie CE zu EF verhält, §. 65.; so verhält sich auch der Raum des ersten zu dem in der nehmlichen Zeit beschriebenen des andern, wie die Länge CE der schiefen Fläche zu ihrer Höhe EF , oder auch wie der Sinus Totus zum Sinus des Winkels, welchen die schiefe Fläche mit dem Horizont macht §. 66.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 69. Zieheth man aus F eine Perpendicular FG auf CE , so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CFE und FGE : $CE : EF = EF : GE$ §. 152. Geomet. folglich weil sich der Raum des senkrecht fallenden Körpers zu dem des über eine schiefe Fläche laufenden wie $CE : EF$ verhält §. 68., so mus GE der Raum sein, welchen der Körper über eine schiefe Fläche laufend in der nehmlichen Zeit beschreibt, als er senkrecht fallend den Raum EF beschriebe, oder der
Körper

Von der zu- und abnehmenden Bewegung. 43

Körper wird auf der schief liegenden Fläche nur von E bis G kommen, da er in der nehmlichen Zeit von E bis F senkrecht fiel.

Wenn demnach EF oder die Tiefe, so ein Körper in einer gewissen Zeit senkrecht durchfällt, bekant ist, und man verlangt zu wissen, wie weit er auf einer schiefen Fläche CE in der nehmlichen Zeit kommen werde, so hat man nur zur ob angeführten Proportion $CE : EF = EF : EG$ den vierten Satz EG zu suchen §. 211. Resolv. oder aber aus F, als aus dem untersten Punkt der Linie EF, so die Höhe des senkrechten Falles ausdrückt, die Perpendikular FG auf CE zu ziehen, um EG dadurch zu bestimmen.

Lehrsatz.

§. 70. Die Räume, welche ein Körper über verschiedene schiefe Flächen in gleicher Zeit durchläuft, verhalten sich wie die Sinusse der Winkel, welche die Flächen mit dem Horizont machen.

Beweis: Wenn wir EF als die Höhe, über welche der Körper in der nehmlichen Zeit senkrecht fallen würde, indem er auf den schiefen Flächen EC und EO einen gewissen Raum beschreibt, annehmen, und aus F die Perpendikularen FG und FL auf EC und EO ziehen, so sind EG und EL die Räume, welche der Körper in eben dieser Zeit auf den schiefen Flächen beschreibt. §. 69. Betrachten wir ferner, daß wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GFE und ECF wie auch LFE und EOF der Winkel $GFE = ECF$, und der Winkel $LFE = EOF$ sei; und stellen uns EF in beiden Dreiecken als den Sinus Totus vor, so ist GE der Sinus des Winkels $GFE = ECF$, und EL der Sinus des Winkels $LFE = EOF$, und folglich ist, $GE : LE = \sin ECF : \sin EOF$.

Zu

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 71. Wenn wir die Geschwindigkeiten, welche der Körper durch den senkrechten Fall EF sowohl als über die schiefen Flächen EG und EL in der nehmlichen Zeit erhält, durch a, b, c ausdrücken, so ist $a : b = EF : EG$, und $a : c = EF : EL$

§. 67. Derowegen ist auch:

$$b : c = EG : EL.$$

d. i. die Geschwindigkeiten, welche ein Körper über verschiedene schiefe Flächen EG und EL laufend in der nehmlichen Zeit erhält, verhalten sich wie die in eben der Zeit beschriebene Räume EG und EL, und da sich diese Räume wie die Sinusse der Winkel, welche diese Flächen mit dem Horizont machen verhalten, §. 70., so stehen auch die Geschwindigkeiten mit diesen im Verhältnis.

Viertes Hauptstück.

Von geworfenen Körpern.

E r k l ä r u n g.

§. 72. Wenn ein Körper von einer Kraft nach was immer für einer Richtung frei, d. i., daß seine Schwere ungehindert in ihn wirken kan, getrieben wird, so heist man diese Bewegung einen Wurf, oder Schuß.

Obwohl die Benennungen Wurf und Schuß im Gebrauche unterschieden sind, und durch die eine meistens der Flug eines Körpers welcher in
einen

einen starken Bogen geschieht, durch die andere aber, wenn der Körper in seinem Fluge sich mehr einer geraden Linie nähert, ausgedrückt wird, so können wir hier doch ohne Hindernis eine für die andere nehmen.

Z u s a z.

§. 73. Es mus daher ieder Wurf oder Schuß aus zween Kräften nehmlich aus der treibenden und aus der Kraft der Schwere zusammengesetzt sein. Nicht minder wenn die Bewegung in einem Raume geschieht, der mit keiner widerstehenden fließigen Materie angefüllet ist, so mus die treibende Kraft mit gleichförmiger die der Schwere aber mit vermehrter Geschwindigkeit wirken. §. 46 u. 16.

Erklärung.

§. 74. Nachdem die Richtungslinie der treibenden Kraft d. i. die Scellinie des Geschüßes in Ansehung des Horizonts eine Stellung bekommt, erhält auch der Wurf und dessen Richtungswinkel eine andere Benennung, nehmlich wenn die Richtungslinie mit dem Horizont parallel, oder der Richtungswinkel $= 0$ ist, so wird der darnach geschehene Wurf ein horizontaler Wurf oder Schuß genent, ist aber die Richtungslinie senkrecht auf dem Horizont, folglich der Richtungswinkel $= 90^\circ$, so heist auch der darnach geschehene Wurf ein senkrechter Wurf; macht aber die Richtungslinie über oder unter den Horizont einen spitzen Winkel, so entstehet nach derselben ein schiefer Wurf überhaupt, insbesondere aber heist der Winkel über den Horizont der Erhöhungswinkel (Angulus Elevationis) und der nach selben geschehene Wurf ein erhöhter Wurf, so wie der Winkel untern Horizont der Erniedrigungswinkel (Angulus Depressio-
nis)

nis) und der in dieser Richtung gemachte Wurf ein gesenkter Wurf genent wird.

Erklärung.

§. 75. Die Wurfweite wird jene gerade Linie genent, so von dem Anfangspunkt der Fluglinie bis zu ihrem Ende gezogen werden kan. Ist nun diese Linie mit dem Horizont parallel; so ist es eine horizontale Wurfweite; ist sie aber zu demselben schief; so wird sie auch eine schiefe Wurfweite genent. Insbesondere heist sie eine erhöhte oder gesenkte Wurfweite, nachdem die von dem Anfangspunkte bis zum Ende des Wurfs gezogene Linie sich über den Horizont erhöht, oder senket.

Erklärung.

§. 76. Die Zeit, welche von Anfang bis zum Ende eines Wurfs verstreicht, heist die Dauerzeit desselben. Man pflegt sie in kleinere gleiche Teile einzuteilen, welche alsdenn überhaupt Momente genent werden.

Das gewöhnlichste kleinste Zeitmaasse ist eine Sekunde oder der sechzigste Teil einer Minute. Aber auch diese wird öfters und zwar bei genauern Verfahren noch in kleinere sechzig Teile, die man alsdenn Terzien nennet, geteilt. Diese kleine Zeittheile suchet man durch das Ablaufen verschiedener hierzu eigens erfundene Maschinen zu erhalten; das einfachste Mittel hierzu zu gelangen, sind die Schläge eines frei hangenden Pendels, welches eben eine solche Länge hat, daß eine Schwankung desselben genau in der verlangten Zeit geschehen könne. Die Berechnung dieser Länge aber würde uns zu weit abführen.

Lehr.

Lehrsatz.

§. 77. Wenn ein Körper durch was immer für eine Kraft in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit getrieben wird, so beschreibt er eine halbe Parabol.

Beweis: Wenn eine Kraft in einen Körper nach Fig. 9.
der horizontalen Richtung AC mit gleichförmiger Geschwindigkeit würfet, so sucht seine Schwere ihn zu gleicher Zeit senkrecht gegen den Mittelpunkt der Erde oder nach der Richtung AN mit zunehmender Geschwindigkeit zu bewegen §. 6. u. 46. oder derselbe erhält eine aus zwei Kräften zusammengesetzte Bewegung §. 14. Nun vermöge der erstern Kraft beschreibt derselbe in gleichen aufeinander folgenden Momenten die gleiche Räume AE , EF , FH u. s. w. §. 25., und vermöge der andern wachsen die in den nehmlichen Zeiten durchlofenen Räume AB , BD , DG u. s. w. wie die ungeraden Zahlen §. 25.; daher wenn man mit den durchlofenen Räumen die Parallelogrammen $ABIE$, $AFLD$, $AGMH$ u. s. w. beschreibt, so siehet man klar, daß der Körper nach Verlauf des ersten Moments weder in E noch in B sondern in I , nach dem zweiten Moment weder in F noch in D sondern in L , und nach dem dritten weder in H noch in G sondern in M sein wird, §. 32. u. s. w. folglich wird er eigentlich die krumme Linie $ALLMO$ beschreiben. Um also zu erweisen, daß dieselbe eine halbe Parabol sei, so betrachtet, daß man die durchlofenen Räume $AE = BI$, $AF = DL$, $AH = GM$ u. s. w. wie die dazu verwendte Zeiten oder Momente ansehen können §. 45. und daß die Höhen eines fallenden Körpers sich wie die Quadrate der Zeiten, folglich wie die Quadrate der Linien BI , DL , GM u. s. w. verhalten §. 42.;
die

die erstere aber oder die Höhen stellen die Abscissen, und die andere die halben Ordinaten der krummen Linie ALLMO vor §. 344. u. 345. Geomet., und dieselben verhalten sich in einen Parabol eben so gegeneinander, §. 353. Geomet.; also wenn ein Körper nach horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit getrieben wird, so beschreibt er eine halbe Parabol.

Z u s a z.

§. 78. So oft also die treibende Kraft verändert wird, so wird auch allezeit eine andere Parabol beschrieben, und sie wird um so flacher als die treibende Kraft grösser angenommen wird.

Z u s a z.

§. 79. Wüste man von einem nach horizontaler Richtung geworfenen Körper, daß derselbe vermög der treibenden Kraft allein in einer gewissen Zeit z. B. in einer Sekunde einen Raum $AE = 100$ Sch., vermög seiner Schwere aber in der ersten Sekunde einen $AB = 15$ Sch. durchlaufen werde, und nebst diesen wäre auch noch die ganze Dauerzeit $= 4$ Sekunden, oder auch die Höhe $AN = 240'$ über die Horizontal NO bekannt, so würde man die Weite $NO = AC$, in welcher nemlich der Körper von der senkrechten AN fallen wird, finden können, wenn man erstlich AE mit der Zeit 4 multipliciret, oder da $AE = BI$, und $AC = NO$, so ist nach obigen Lehrsaß:

$$AB : AN = BI^2 : NO^2.$$

$$\text{oder } 15' : 240 = 10000 : x$$

$$\text{Folglich } \frac{AN \times BI^2}{AB} = NO^2$$

oder

$$\text{oder } \frac{240 \times 10000}{15} = 160000$$

$$\text{und } \frac{\sqrt{AN \times BI^2}}{AB} = NO.$$

$$\text{Das ist } \sqrt{160000} = 400' = NO.$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 80. Wäre die Höhe AN samt der Weite NO gegeben, und man verlangte den Raum AE = BI welchen die treibende Kraft in einer Sekunde für sich allein beschreiben könnte, zu finden, so setzt

$$AN : AB = NO^2 : BI^2.$$

$$\text{und } \frac{AB \times NO^2}{AN} = BI^2.$$

$$\text{Folglich } \frac{\sqrt{AB \times NO^2}}{AN} = BI.$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 81. Hätte man die Weite AE der treibenden Kraft in einer Sekunde nebst der ganzen Weite NO bekannt, so fände man die ganze Dauerzeit oder die Anzahl der Sekunden, wenn man setzte:

$$AE : 1'' = NO : x$$

$$\text{und } \frac{NO \times 1''}{AE} = x \text{ der Anzahl Sekunden.}$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 82. Ist die Weite AE = BI in einer Sekunde nebst der ganzen Weite NO gegeben, so erhält man die ganze Höhe AN, weil man AB aus der Unterb. Mechanik. III. Th. D

fah.

fahrung immer für 15' annehmen kan, wenn man
setzet:

$$\overline{BI}^2 : \overline{NO}^2 = AB : AN.$$

$$\text{und } \frac{\overline{NO}^2 \times AB}{\overline{BI}^2} = AN.$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 10. §. 83. Wenn also zwei ungleiche Kräfte zweien
gleiche Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit in
horizontaler Richtung AC und von einer Höhe AN
fortzutreiben suchen, so stehen die horizontalen Weiten
NO und NS mit den Räumen der treibenden Kräfte
der ersten Sekunde z. B. mit GM und GP, die zu-
gleich auch die Geschwindigkeiten ausdrücken, in Pro-
portion.

D. i. $AG : AN = \overline{GM}^2 : \overline{NO}^2$. §. 353. Geomet.

und $AG : AN = \overline{GP}^2 : \overline{NS}^2$. §. 353. Geomet.

Folglich $\overline{GM}^2 : \overline{GP}^2 = \overline{NO}^2 : \overline{NS}^2$

und also $GM : GP = NO : NS$. §. 217. Rechenk.

Dieses könnte einigermaassen Gelegenheit geben,
die Verhältniß der Geschwindigkeit des Trieb's von
zweien Ladungen eines Feuegewehrs oder Ge-
schüßes zu finden, wenn man von dem Wider-
stand der Luft abstrahiren könnte; da aber dieser
sonderlich bei grössern Geschwindigkeiten, wie ge-
wöhnlich die Stuckkugeln haben, ungemein be-
trächtlich ist, und bisher noch nicht genau bestimmt
hat werden können, so wird man sich auch nicht
wundern, wenn diese Regeln nicht richtig ein-
treffen.

Lehrsatz.

§. 84. Wenn ein Körper durch was immer für eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit wirkende Kraft in schiefer Richtung über den Horizont geworfen wird, so beschreibt er eine Parabel.

Beweis: Wenn ein Körper durch eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit wirkende Kraft in einer schiefen Richtung AG über den Horizont AO geworfen wird, so beschreibt er ohne Schwere betrachtet in gleichen auf einander folgenden Zeiten oder Momenten die gleiche Räume AB , BC , CD u. s. w. §. 5. und man kan auch AB als die Geschwindigkeit der treibenden Kraft in einem Momente ansehen §. 12; ferner würde der geworfene Körper ohne Schwere von der Richtungslinie AG gar nicht abweichen, sondern sich nach dem ersten Momente um PB , nach dem zweiten um QC , nach dem dritten um RD , nach dem vierten um SE und so nach jedem Momente um gleichviel, d. i. jedesmal um PB mehr als in den vorher gehenden erheben. Da aber die Schwere dieser Erhebung gerade entgegen würket, und diese Würfungen nach jedem Momente sich wie die Quadrate der Zeiten oder der verfloffenen Momenten verhalten §. 42. so wird der Körper nach keinen Momente die besagte Höhen BP , QC , RD u. s. w. gänzlich erreichen, sondern derselbe wird nach dem ersten Momente anstaat in B nur in H , nach dem zweiten anstaat in C nur in I und nach dem dritten anstaat in D nur in L u. s. w. steigen können, und die Abgänge BH , CI , DL , EM u. s. w. von besagten Höhen werden wie die Quadrate der bis dahin verfloffenen Momenten d. i. wie 1. 4. 9. 16. 25 u. s. w. zu nehmen. §. 42. Ziehet man nun

Fig. II.

die Wirkungen der Schwere nach ieden Momente von den besagten Höhen ab; d. i. sehet man:

$$PB - BH = PH$$

$$QC - CI = QI$$

$$RD - DL = RL$$

$$SE - EM = SM \text{ u. s. w.}$$

so werden die wirklich erreichte Höhen PH, QI u. s. w. anfänglich bis auf eine gewisse wie hier RL, welche der Wirkung der Schwere gleich ist, wenn diese eben die Hälfte von der Höhe DR betraget, wachsen, dann aber da die Wirkung der Schwere immer mehr zunimmt, wieder abnehmen wie SM, TN; bis endlich die Wirkung der Schwere der Höhe GO selbst gleich, und $GO - GO = 0$ wird; dann wird der Körper in O und also mit dem Anfangspunkt A des Wurfs wieder in gleiche Höhe gekommen sein. Hält nun den Körper in O nichts auf, so wird die Wirkung der treibenden Kraft in folgenden Momente $= GX$ sein, die Wirkung der Schwere aber wird in voriger Verhältnis zunehmen, und $= XY$ werden, und der Körper wird in Y kommen, u. s. w. bis er endlich durch einen Gegenstand aufgehalten wird, und auf diese Art wird also der geworfene Körper eigentlich die krumme Linie AHILMNO beschreiben.

Um nun zu erweisen, daß dieselbe eine Parabol sei, so lasset erstlich aus A die Perpendikular AZ fallen, und aus den Punkten HILMNO führet die Linien UH, VI, WL u. s. w. parallel zu AG, damit die Parallelogrammen AUHB, AVIC, AWLD u. s. w. entstehen.

Nun verhalten sich die Linien BH, CI, DL u. s. w. welche die Wirkungen der Schwere ausdrücken, wie die Quadrate der Momente, d. i.

BH

$$BH : CI = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

$$BH : DL = \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 \text{ u. s. w. §. 42.}$$

und weil in den Parallelogrammen ihre gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, §. 108. Geomet. so ist auch

$$AU : AV = \overline{UH}^2 : \overline{VI}^2.$$

$$AU : AW = \overline{UH}^2 : \overline{WL}^2 \text{ u. s. w.}$$

Endlich stellet AZ einen Diameter, AU, AV, AW die Abscissen, und UH, VI, WL die Ordinaten der beschriebenen krummen Linie vor, und die Abscissen und Ordinaten eines Diameters einer Parabol verhalten sich eben also, §. 353. Geomet. folglich ist die beschriebene krumme Linie eine Parabol.

Um den Anfängern die Wirkungen der treibenden Kraft und der Schwere, wenn sie bei geworfenen Körpern zusammengesetzt sind, begreiflicher zu machen, so wollen wir ihnen ein wirkliches Beispiel in Zahlen berechnet hersehen, nemlich wir nehmen an, daß die treibende Kraft den Körper ohne Schwere betrachtet in ieder Momente, z. B. in ieder Sekunde $= AB = 185'$ treiben könne, und daß der Richtungswinkel GAO eben so groß sei, daß die Höhe PB, um welche der Körper nach ieder Momente höher als in dem vorigen steigen sollte, $90'$ betriege; ferner wissen wir aus der Erfahrung, daß die Wirkung der Schwere nach der ersten Sekunde $= BH = 15'$, nach der zwoten $= CI = 15 \times 4$, nach der dritten $= DL = 15 \times 9$ sei, und so alle Sekunden wie die Quadrate der verfloßenen Zeiten zunehme, so bekommen wir nach obigen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
 A &= \text{-----} = 0 \\
 PB - BH &= PH = 90 \times 1 - 15 \times 1 = 75 \\
 QC - CI &= QI = 90 \times 2 - 15 \times 4 = 120 \\
 RD - DL &= RL = 90 \times 3 - 15 \times 9 = 135 \\
 SE - EM &= SM = 90 \times 4 - 15 \times 16 = 120 \\
 TF - FN &= TN = 90 \times 5 - 15 \times 25 = 75 \\
 OG - GO &= 0 = 90 \times 6 - 15 \times 36 = 0.
 \end{aligned}$$

Die erste Kolone der Zahlen links stellet die Höhen vor, so der Körper ohne Schwere betrachtet nach jeder verfloßenen Sekunde erreichen hätte sollen, die zweite zeigt die Wirkungen der Schwere nach jeder Sekunde, oder um wie viel der Körper durch die Schwere nach jeder Sekunde im Steigen verhindert worden ist; und die dritte weist die von dem Körper wirklich erreichte Höhen. Ferner siehet man, daß die erreichte Höhen immer anwachsen bis auf die mittlere, und daß diese die größte $= 135'$, und eben so groß als die Wirkung der Schwere 15×9 , folglich nur die Hälfte von der ganzen $RD = 90 \times 3$ sei; endlich daß die folgende erreichte Höhen wieder abnehmen, und die letzte $0 = 0$ werde, weil damals die Wirkung der Schwere eben so groß als OG worden, folglich mus der Körper mit A wieder in gleiche Höhe gekommen sein.

Betrachten wir nun noch die nach verschiedenen Zeiten erreichte Weiten AB, AC, AD u. s. w. d. i. die Wirkungen der treibenden Kraft als die Ordinaten UH, VI, WL u. s. w. und die Wirkungen der Schwere BH, CI, DL u. s. w. in eben diesen Zeiten als die Abscissen AU, AV, AW u. s. w. und setzen sie nach obigen Lehrsatze und nach den oben gefundenen Zahlen an, so ist

$$AU : AV = \overline{UH}^2 : \overline{VI}^2$$

das ist $15 \times 1 : 15 \times 4 = 185^2 : 370^2$

oder $15 : 60 = 34225 : 136900$

und $AU : AW = \overline{UH}^2 : \overline{WL}^2$

das ist $15 \times 1 : 15 \times 9 = 185^2 : 555^2$

oder $15 : 135 = 34225 : 308025$.

D. i. die Abscissen stehen mit den Quadraten ihrer Ordinaten in Proportion, folglich ist die krumme Linie, so von dem geworfenen Körper beschrieben worden, eine Parabel.

Obwohl die Richtungen BP, CQ, DR u. s. w. der Schwere der Schärfe nach betrachtet, eigentlich nicht parallel sind, wie doch hier angenommen wird, sondern am Mittelpunkt der Erde zusammenlaufen, so kan man sie auch bei der größten Wurfweite, die man mit gewöhnlichen Wurfmaschinen erhalten kan, dennoch ohne merklichen Fehler alzeit dafür annehmen, weil ihre Winkel am Mittelpunkt der Erde immer noch sehr spizig ausfallen.

Z u s a z.

§. 85. Wenn also die Richtungslinie AB mit dem Horizont AO einen Winkel OAB abwärts d. i. einen Erniedrigungswinkel machet, so läßt sich auf die nehmliche Art erweisen, daß der nach der selben geworfene Körper ein Stück eine Parabel ACDEF beschreibt.

Z u s a z.

§. 86. Weil $AR = RO$, so ist $\frac{GO}{2} = DR$; Fig. 11.

und $\frac{DR}{2} = LR$ §. 368. Geomet., folglich ist $\frac{GO}{4}$

$= LR$; da nun GO die Wirkung der Schwere am

Ende des Wurfs, und LR die Höhe der Parabel angezeigt, so mus ein frei fallender Körper in der nehmlichen Zeit, als er schief geworfen eine Parabel beschreibt, viermal tiefer fallen, als die Höhe der Parabel beträgt.

Z u s a z.

§. 87. Wenn man eine Wurfsweite AO, so in einen gegebenen Erhöhungswinkel GAO erreicht worden ist, bekant hat, so kan man so wohl die Wirkung der Schwere GO am Ende des Wurfs, als auch der treibenden Kraft AG, d. i. die Räume, so diese beide Kräfte iede für sich während der Zeit des Wurfs beschreiben würden, finden, wenn man setzt:

$$\text{Sin tot} : \text{tang. GAO} = \text{AO} : \text{GO}.$$

folglich ist

$$\frac{\text{tang GAO} \times \text{AO}}{\text{Sin tot}} = \text{GO}.$$

und

$$\text{Sin GAO} : \text{Sin tot} = \text{GO} : \text{AG}.$$

Folglich ist

$$\frac{\text{Sin tot} \times \text{GO}}{\text{Sin GAO}} = \text{AG}.$$

Z u s a z.

§. 88. Da sich die Wirkungen der Schwere wie die Quadrate der Zeiten, oder auch wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der gleichförmigen Bewegung verhalten, §. 42., und man aus der Erfahrung weis, daß die Wirkung der Schwere nach der ersten Sekunde $= \text{BH} = 15'$ sei, so läßt sich, wenn man AG und GO sich nach vorigen Zusatz bekant gemacht hat, auch die Geschwindigkeit AB oder der Raum, den die treibende Kraft für sich den Körper in einer

Se-

Getunde beschreiben machen könnte, finden, wenn man setzt:

$$GO : BH = \overline{AG}^2 : \overline{AB}^2$$

folglich $\frac{BH \times \overline{AG}^2}{GO} = \overline{AB}^2$

und also $\frac{\sqrt[3]{BH \times \overline{AG}^2}}{GO} = AB$

Z u s a z.

§. 89. Dividiret man AG durch AB, so bekommt man die Momente der Dauerzeit, d. i. die Sekunden, in welchen der ganze Wurf geschehen ist. §. 13.

Z u s a z.

§. 90. Wäre die Geschwindigkeit AB der treibenden Kraft samt der Dauerzeit und den Erhöhungswinkel bekannt, so fände man die Wurfweite AO, wenn man erstlich AB durch die Zeiten multiplicirt, um AG zu erhalten; denn aber setzt:

$$\text{Sin tot} : \text{Kosin A} = AG : AO.$$

und $\frac{\text{Kosin A} \times AG}{\text{Sin tot}} = AO.$

L e h r s a z.

§. 91. Die mit verschiedenen treibenden Kräften in einerlei Erhöhungswinkel erreichte Wurfweiten verhalten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der treibenden Kräfte.

Beweis: Betrachtet, daß der geworfene Körper Fig. 13. z. B. mit doppelter Geschwindigkeit in der nehmlichen Zeit als mit einfacher Geschwindigkeit einen doppelten Raum beschreibe. §. 13. Die Würfung der Schwere

re aber ist nach Verlauf einer gleichen Anzahl Momente in beiden Würfen gleich groß. Wenn daher der Körper bei dem ersten Wurf mit einfacher Geschwindigkeit AB nach Verlauf von 6 Momenten vermög der treibenden Kraft allein den Raum AG beschreibe, und die Wüfung der Schwere \equiv GO wäre, so wird derselbe bei dem zweiten Wurf mit doppelter Geschwindigkeit AC nach eben dieser Zeit einen doppelten Raum AM vermög der treibenden Kraft allein beschreiben sollen, §. 13. Die Wüfung der Schwere MN aber wird damals nicht grösser als beim ersten Wurf um eben diese Zeit sein §. 6.

Da nun in dem Dreiecke AMS die Linie GO parallel zu MS, und $AG = \frac{AM}{2}$ ist, so mus auch

$$AO = \frac{AS}{2}, \text{ und folglich } OG = \frac{MS}{2} \text{ sein; weil ferner}$$

$$OG = MN, \text{ so ist auch } MN = \frac{MS}{2} = NS;$$

weil nun die Wüfung der Schwere MN der von dem geworfenen Körper würklich erreichten Höhe NS gleich ist, so ist N der höchste Punkt der Parabol des Wurfs mit doppelter Geschwindigkeit, und $AS = 2AO$ die halbe, $AY = 2AS$ oder $4AO$ die ganze Wurfweite. Nun aber ist

$$4AO : AO = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$$

$$\text{oder } AY : AO = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2.$$

Und was hier von der doppelten und einfachen Geschwindigkeit behauptet wird, läßt sich ebenfalls von allen übrigen Verhältnissen derselben sagen, also ist erwiesen, daß die mit verschiedenen Geschwindigkeiten und unter einerlei Erhöhungswinkel erreichte Wurfweiten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten.

Z u s a z.

§. 92. Da der Körper beim Wurf mit doppelter Geschwindigkeit zu Beschreibung der halben Parabol AN eben so viel Zeit brauchet, als beim Wurf mit einfacher Geschwindigkeit zur Beschreibung der ganzen Parabol ALO, so mus er zur Beschreibung der ganzen Parabol ANY doppel so viel Zeit als zu ALO nöthig haben; es müssen sich demnach bei Würfen unter einerlei Erhöhungswinkel aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten die Zeiten wie die Geschwindigkeiten verhalten.

Z u s a z.

§. 93. Gleichwie erwiesen worden, daß:

$$AY : AO = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2.$$

so ist auch $\sqrt[2]{AY} : \sqrt[2]{AO} = \sqrt[2]{\overline{AC}^2} : \sqrt[2]{\overline{AB}^2}.$

und folglich $\sqrt[2]{AY} : \sqrt[2]{AO} = AC : AB.$ §. 217. Rechenk. d. i. die Quadratwurzeln aus den mit verschiedenen Geschwindigkeiten in einerlei Erhöhungswinkel erreichten Wurfweiten verhalten sich wie diese Geschwindigkeiten.

Obwohl der Lehrsaß §. 91. und Zusaß §. 93. in den Gefäßen der Bewegung für sich betrachtet allerdings gegründet ist, und dem Ansehen nach scheint, daß man ihn beim Bomben werfen, wenn man in einerlei Erhöhungswinkel verschiedene Weiten erreichen sol, zur Bestimmung der Pulverladungen des Böllers, da man sie als die Ursachen der Geschwindigkeiten ansiehet, mit Vortheil anwenden könne; so kan ich doch die Anfänger, die sich durch dergleichen zu voreilig angenommenen Regeln nur gar zu oft in die Irre führen lassen, und dann durch die Erfahrung eines

an

andern überzeugt die Schuld der Theorie beimessen, hier nicht unerinnert lassen, daß die Würfungen des entzündenen Pulvers nicht mit ihrer Menge in Proportion stehen. Durch die Entzündung von 2 \mathcal{L} Pulver wird zwar wohl zweimal so viel eingesperte oder verdickte Luft als in 1 \mathcal{L} los und ihrer Schnelkraft überlassen; allein da die Entzündung nur nach und nach geschehen kan, und 2 \mathcal{L} hierzu mehr Zeit als 1 \mathcal{L} brauchen, so ist klar, daß die losgelassene Luft niemals mit ihrer ganzen Schnelkraft zugleich in die Bombe würfe, folglich eine doppelte Menge Pulver derselben niemals eine doppelte Geschwindigkeit beibringe, und also auch damit keine vierfache Weite zu erreichen sein wird. Ich übergehe mit Stillschweigen, um wie viel die Wurfweite bei vermehrter Geschwindigkeit oder verstärkter Ladung durch den größern Widerstand der Luft als bei minderer Geschwindigkeit oder Ladung mehr verkürzt werden mus, da uns die Erfahrung dessen ohnehin genugsam überzeugt.

Lehrsatz.

§. 94. Wenn zween Würfe mit gleicher Geschwindigkeit der treibenden Kraft aber in verschiedenen Richtungswinkeln geschehen, so verhalten sich die Dauerzeiten derselben wie die Sinusse ihrer Erhöhungswinkel.

Fig. 14. Beweis: Betrachtet, daß, weil bei beiden Würfen nach den verschiedenen Erhöhungswinkeln GAO und HAI die Geschwindigkeiten der treibenden Kräfte die Körper in gleichen aufeinander folgenden Momenten gleiche Räume AG und AF durchlaufen machen, die Würfung der Schwere so wohl bei dem einem als

an.

ändern Wurf nach einer gleichen Anzahl Momente immer gleich groß ist, deswegen wird dieselbe oder OG am Ende des ersten Wurfs gleich FL der Wurfung der Schwere des zweiten Wurfs nach eben so viel Momenten sein. Nun aber verhalten sich die Wurfungen der Schwere im zweiten Wurf nach verschiedenen Momenten wie die Quadrate dieser Momente d. i.

$$HI : FL = \overline{AH}^2 : \overline{AF}^2. \S. 42.$$

also verhalten sich auch die Wurfungen der Schwere HI und OG der beiden Würfe wie die Quadrate ihrer verfloßenen Momente d. i.

$$OG : HI = \overline{AG}^2 : \overline{AH}^2.$$

Ferner betrachtet, daß, wenn man aus B und C die Perpendicularen BD und CE auf AI fallen läßt, AB so oft in AG, und BD so oft in OG enthalten sei, als in diesem Wurf Momente verfließen §. 12; eben so ist in dem zweiten Wurf AC so oft in AH, und CE in HI enthalten, als in diesem Wurf Momente verfließen.

Wenn man daher $AB = AC$ als den Sinus totus ansiehet, so sind BD und CE die Sinusse der Erhöhungswinkel; und benennen wir den ersten BD mit s und den andern CE mit S; die Dauerzeit oder die Momente des ersten Wurfs mit x und die des andern mit y, so können wir OG durch sx und HI durch Sy ausdrücken; und da sich diese Linien wie die Quadrate der Momente verhalten §. 42. so ist

$$sx : Sy = xx : yy.$$

$$\text{folglich } xxyS = yyxs$$

dividirt man nun beide Glieder durch xy §. 56. Resultent. so ist:

$$xS = ys.$$

Endlich diese Gleichung in eine Proportion aufgelöst:

$$x : y = s : S.$$

D. i.

D. i. die Dauerzeiten zweener mit gleicher Geschwindigkeit und in verschiedenen Erhöhungswinkeln geschehenen Würfe verhalten sich wie die Sinusse ihrer Erhöhungswinkel.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 95. Wenn also die Dauerzeit eines Wurfs $= a$, und sein Erhöhungswinkel GAO gegeben wäre, und man verlangte die Dauerzeit y eines andern Wurfs in einen bekanten Erhöhungswinkel HAI, jedoch mit der vorigen treibenden Kraft zu finden, so setzet

$$\sin GAO : \sin HAI = a : y$$

$$\text{folglich } \frac{\sin HAI \times a}{\sin GAO} = y$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 15. §. 96. Hätte man die Dauerzeit eines Wurfs AC als a in einen gewissen Erhöhungswinkel bekant, und man verlangte die Dauerzeit y des mit der nehmlichen Kraft aber in einen Winkel CAD $= 90^\circ$ oder eines senkrecht in die Höhe gehenden Wurfs zu finden, so ist nach §. 94.

$$\sin BAC : \sin tot = a : y$$

$$\text{und } \frac{\sin tot \times a}{\sin BAC} = y$$

und diese mus nothwendig von allen Würfen, welche mit der nehmlichen treibenden Kraft in verschiedenen Winkeln geschehen können, die größte sein.

A u f g a b e.

Fig. 14. §. 97. Wenn von zween mit gleicher treibender Kraft geschehenen Würfen ihre verschiedene Erhöhungswinkel samt der Wurfweite AO des einen bekant, wie die Wurfweite AI des andern zu finden?

Auf.

Auflösung: 1. Suchet die Wirkung der Schwere OG am Ende des ersten Wurfs, indem ihr setzet:

$$\text{Sin tot} : \text{tang GAO} = \text{AO} : \text{GO}$$

und folglich $\frac{\text{Tang GAO} \times \text{AO}}{\text{Sin tot}} = \text{GO}$. §. 430. Geom.

2. Suchet auch die Wirkung der treibenden Kraft AG folgender gestalt:

$$\text{Sin GAO} : \text{Sin tot} = \text{GO} : \text{AG}.$$

und also $\frac{\text{Sin tot} \times \text{GO}}{\text{Sin GAO}} = \text{AG}$. §. 434. Geomet.

3. Da sich die Wirkungen der Schwere wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten §. 42. und die Wirkung der Schwere nach der ersten Sekunde $= 15'$ und am Ende des Wurfs $= \text{OG}$ ist, so ist

$$\text{OG} : 15' = \overline{\text{AG}}^2 : \overline{\text{AB}}^2.$$

und folglich $\sqrt{\frac{15' \times \overline{\text{AG}}^2}{\text{OG}}} = \text{AB}$ der Geschwindigkeit der treibenden Kraft.

4. Da AB so oft in AG enthalten als Zeiten verfließen währenden Wurf, so ist $\frac{\text{AG}}{\text{AB}} = a$ der Dauerzeit des ersten Wurfs.

5. Weil sich die Dauerzeiten der Würfe wie die Sinusse ihrer Erhöhungswinkel verhalten §. 24. so ist, wenn man die Dauerzeit des zweiten Wurfs $= y$ nimt:

$$\text{Sin GAO} : \text{Sin HAI} = a : y$$

folglich $\frac{\text{Sin HAI} \times a}{\text{Sin GAO}} = y$.

6. Weil die Geschwindigkeiten der treibenden Kräfte in beiden Wurfen gleich angenommen werden, d. i. weil $AB = AC$, so ist
 $AB \times y = AH$.

7. Um also die zweite Wurfweite AI zu finden, setzt:

$$\begin{aligned} \text{Sin tot} : \text{Cosin von HAI} &= AH : AI. \\ \text{und } \frac{\text{Cosin von HAI} \times AH}{\text{Sin tot}} &= AI. \end{aligned}$$

Da die Auflösung dieser Aufgabe etwas weitläufig ist, und viel zu rechnen erfordert, daher in der Ausübung beim Bombenwerfen ziemlich un bequem und langweilig wäre, so geben wir sie indessen nur zur Übung des Verstands, und werden endlich in der Folge noch kürzere Arten die Wurfweiten zu berechnen beibringen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 15. §. 98. Hätte man die Wurfweite AC , welche in einen gegebenen Winkel BAC mit einer gewissen treibenden Kraft AE erreicht werden kan, bekant, und man verlangte die Höhe AD zu finden, auf welche der senkrecht in die Höhe geworfene Körper durch eben die treibende Kraft $AF = AE$ getrieben werden könnte, so suchet zuvor sowohl die Dauerzeit der ersten als des andern Wurfs nach der senkrechten Richtung AD wie §. 96. und auch die Geschwindigkeit $AE = AF$ der treibenden Kraft nach §. 97. N. 3. Denn aber multiplicirt die Geschwindigkeit durch die Dauerzeit des senkrechten Wurfs, so ist das Produkt der senkrechten Höhe AD gleich.

Um

Um sich dessen zu überzeugen, so nehme man an, daß die Geschwindigkeit $AE = AF$ der treibenden Kraft in 1 Sekunde $= 75$ sei, und daß folglich der geworfene Körper ohne Schwere betrachtet in der senkrechten Richtung AD alle Sekunden 75 Schuh steigen müßte; weil er aber von der Schwere beständig und zwar nach der ersten Sekunde um 15' im Steigen verhindert wird, S. 52., und diese Hindernisse alle Sekunden wie die Quadrate der verflossenen Zeiten zunehmen, so wird der Körper nach der

$$1\text{ten Sekunde } 75 \times 1 - 15 \times 1 = 60$$

$$2\text{ten.} \dots\dots\dots 75 \times 2 - 15 \times 4 = 90$$

$$3\text{ten.} \dots\dots\dots 75 \times 3 - 15 \times 9 = 90$$

$$4\text{ten.} \dots\dots\dots 75 \times 4 - 15 \times 16 = 60$$

$$5\text{ten.} \dots\dots\dots 75 \times 5 - 15 \times 25 = 0$$

gestiegen sein, d. i. er wird nach der 5ten Sekunde nicht mehr weiter steigen können, weil alsdann die Wirkung der Schwere eben so groß als die der treibenden Kraft ist, sondern er wird eben in diesem Momente zurück zu fallen anfangen, und also in D seine größte Höhe, die dem Produkt aus der Geschwindigkeit AF der treibenden Kraft in die Anzahl der verflossenen Sekunden d. i. $75 \times 5 = 375$ gleich ist. Daher ist also klar, daß man um die senkrechte Wurshöhe AD zu bekommen, die Geschwindigkeit der treibenden Kraft durch die Dauerzeit multipliciren müsse.

Lehrsatz.

S. 99. Die in verschiedenen Erhöhungswinkeln mit gleichen treibenden Kräften erreichte horizontale Wurssweiten verhalten sich wie die Sinusse der doppelten Erhöhungswinkel.

Fig. 16.

Beweis: Wenn EAC und DAB die zween Erhöhungswinkel sind, in welchen mit gleicher treibender Kraft die Wurfweiten AB und AC erreicht worden, so sind die Perpendikularen BD und CE die Würlungen der Schwere am Ende eines jeden der beiden Würfe. Richtet man ferner aus A eine Perpendikular AF von unbestimmter Länge auf AC auf; beschreibt durch die drei Punkte A , D und E einen halben Birkel nach §. 60. Geom. und ziehet noch die Linien DF , EF , GE und GD , d. i. letztere zwei aus dem Mittelpunkt G des Birkels; so ist der Winkel $AFD = DAB$, und $AFE = EAC$. §. 77 u. 84. Geom. Nun aber ist AGD doppelt so groß als AFD , und folglich auch als DAB ; und AGE ist doppelt so groß als AFE oder EAC §. 77. Geom. folglich sind AGD und AGE gleich den doppelten Erhöhungswinkeln, und läßt man aus D und E noch die Perpendikularen DL und EI auf AF fallen, so stellen sie die Sinusse der doppelten Erhöhungswinkel vor §. 428. N. 3. Geom. Da nun die Dreiecke ADB und ALD einander, und ACE und AIE ebenfalls einander wegen den Parallelen AL , BD ; AB , LD , und AI , EC , AC , IE , gleich und ähnlich sind, so ist

$$AC : AB = IE : LD. \text{ §. 140. Geom.}$$

daß ist: die in verschiedenen Erhöhungswinkeln mit einerlei treibenden Kraft erreichten horizontalen Wurfweiten verhalten sich wie die Sinusse der doppelten Erhöhungswinkeln.

Fig. 17.

Es ist das nehmliche auf eben die Art zu erweisen, wenn man anstatt den ganzen Richtungslinien AE und AD fig. 16. nur ihre Viertel wie AE und AD fig. 17. für die Gehnen des halben Birkels der zu beschreiben ist, annimmt. Der Unterschied wird alsdann nur darinnen bestehen, daß $LD = AN$ nur der vierte Teil der Wurfweite AB ,

AB, und $IE = MA$ nur der vierte Teil der Wurfweite AC ist.

Z u s a z.

§. 100. Da sich die mit gleicher treibenden Kraft Fig. 18. erreichten horizontalen Wurfweiten wie die Sinusse ihrer doppelten Erhöhungswinkel verhalten §. 99., der doppelte Winkel von 45° $HAR = AGH = 90^\circ$ ist, und den Sinus totus GH als den größten zum Sinus hat, so mus auch in dem Winkel von 45° , wenn man die treibende Kraft gleich annimt, unter allen andern Erhöhungswinkeln die größte Wurfweite AO erreicht werden.

Z u s a z.

§. 101. Wenn zween Würfe in den Erhöhungswinkeln SAB und TAB, wovon der erste um eben so viel grösser als der andere kleiner als 45° ist, mit gleicher treibender Kraft geschehen, so ist der doppelte EGA des ersten um EGH grösser, und der doppelte AGD des andern um HGD d. i. um eben soviel kleiner als $AGH = 90^\circ$; derowegen ist $FGE = AGD$, und folglich sind auch ihre Sinusse IE und LD einander gleich. Da nun auch der stumpfe Winkel EGA IE zu seinem Sinus hat, §. 428. Geom. so haben diese zween doppelte Erhöhungswinkel gleiche Sinusse; weil sich aber die Wurfweiten wie diese verhalten, §. 99. so folget, daß man mit zween Würfen, deren Erhöhungswinkel einer um soviel grösser als der andere kleiner als 45° ist, einerlei Wurfweiten AB erreichen müge.

Der Unterschied dieser zween Würfe bestehet nur darinn, daß in dem grössern Winkel eine höhere nach dem kleinern aber eine niedere Parabol beschrie-

geschrieben wird; daß die Dauerzeit des Wurfs im erstern um so länger als die im andern als der Sinus dessen Erhöhungswinkel grösser ist als der des andern; und endlich daß der geworfene Körper im ersten durch seinem Fall eine grössere Geschwindigkeit erlange. Die Umstände allein bestimmen, welchen Winkel von beiden man nehmen müsse.

A u f g a b e.

Fig. 16. §. 102. Wenn zween Erhöhungswinkel nebst der in einem derselben erreichten horizontalen Wurfweite gegeben, wie die Wurfweite, welche man in dem andern Winkel mit gleicher treibenden Kraft erreichen kan, zu finden?

Geometrische Auflösung: 1. Zeichnet die zween gegebenen Erhöhungswinkel DAB und EAB ; machet AB der gegebenen Wurfweite nach einem beliebigen verjüngten Maasstab gleich, und errichtet aus B die Perpendikular BD .

2. Errichtet auf AB die unbestimte Perpendikular AF , und auf AD die Perpendikular DF bis sie AF durchschneidet.

3. Theilet AF in G in zween gleiche Teile, und mit dem Radius GA beschreibet den halben Birkel $AHDF$.

4. Lasset aus dem Punkt E , wo der Schenkel AE des andern gegebenen Erhöhungswinkel den halben Birkel durchschneidet, eine Perpendikular, EC auf AC fallen, so ist, AC die Wurfweite, so man in dem Erhöhungswinkel EAC mit der nehmlichen treibenden Kraft erreichen kan. §. 99.

Auf.

Auflösung durch die Rechnung: Geſet:

$$\sin 2DAB : \sin 2EAC = AB : AC.$$

ſo iſt
$$\frac{\sin 2EAC \times AB}{\sin 2DAB} = AC.$$

Wolte man nicht die ganze Linie AD fig. 16. für die Sehne des Birkels ſondern nur z. B. den vierten Teil davon wie fig. 17. annehmen, ſo theilt die gegebene Wurfweite AB in 4 gleiche Teile, errichtet auf dem vierten Teile derſelben die Perpendikular ND, und auf AD die Perpendikular DF bis ſie AF durchſchneidet, und mit $\frac{1}{2}AF = GA$ beſchreibt den halben Birkel ADF; endlich laſſet aus E, wo der Schenkel AE des einen Erhöhungswinkel den Birkel durchſchneidet, die Perpendikular EM fallen, ſo iſt AM der vierte Teil der geſuchten Wurfweite $AC = 4AM$.

A u f g a b e.

§. 103. Wenn man zwei horizontale Wurfweiten, Fig. 16. welche man mit gleicher treibender Kraft in verſchiedenen Erhöhungswinkeln erreichen kan, nebst dem Erhöhungswinkel der einem bekannt hat, wie der Erhöhungswinkel der andern zu finden?

Geometriſche Auflöſung: 1. Traget die zwei Wurfweiten AB und AC nach einem beliebigen verjüngten Maasſtab auf eine horizontallinie aus einem Punkt A auf, und zeichnet den gegebenen Erhöhungswinkel DAB der einen.

2. Errichtet auf AC aus B die Perpendikular BD bis an den Schenkel AD; AF und CE ebenfalls perpendicular auf AC, aber von unbestimmter Länge.

3. Auf AD errichtet die Perpendicular DF bis sie AF durchschneidet, und mit $\frac{1}{2}AF = GA$ beschreibet den halben Birkel ADF.

4. Durch E wo nemlich der Birkel die Perpendicular CE durchschneidet, ziehet die Linie EA, so ist EAC der gesuchte Erhöhungswinkel zur Wurfweite AC. §. 99.

Auflösung durch die Rechnung: Gehet;

$$AB : AC = \sin 2DAB : \sin 2EAC.$$

$$\text{so ist: } \frac{AC \times \sin 2DAB}{AB} = \sin 2EAC. \text{ §. 99.}$$

Welchen man in den Sinustafeln nachzuschlagen hat, um seine Grade zu finden, die man alsdenn halbiren muß.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 104. Geignet es sich, daß die Wurfweite AC so gros ist, daß der halbe Birkel ADF die Perpendicular CE weder durchschneiden noch berühren kan, so ist es ein Zeichen, daß gedachte Wurfweite mit der nemlichen treibenden Kraft auch nicht in 45° grad, folglich auch in keinen andern Erhöhungswinkel erreicht werden kan, und in solchem Falle ist man gezwungen eine grössere treibende Kraft anzunehmen.

Wolte man auch in dieser Aufgabe nicht die ganze Linie AD fig. 16. sondern nur $\frac{1}{4}$ davon wie AD fig. 17. annehmen, so hat man auf eine ähnliche Weise wie in der vorigen Aufgabe zu verfahren.

Lehr.

L e h r s a t z.

§. 105. Der Parameter der Achse einer von einem geworfenen Körper beschriebenen Parabol ist die dritte Proportional zu der Wirkung der Schwere am Ende des Wurfs, und zu der erreichten Wurfweite.

Beweis: Wenn EAC der Erhöhungswinkel des Wurfs, in welchen mit einer gewissen treibenden Kraft die Parabol AOC beschrieben worden, so ist AC die Wurfweite, EC aber die Wirkung der Schwere am Ende des Wurfs. Fig. 16.

Da nun wegen den Parallelen AF und EC, wie auch IE und AC die Linien $AC = IE$, und $EC = AI$ sind, und IE perpendicular auf den Durchmesser des halben Zirkels AEF auftrifft, so ist:

$$AI : IE = IE : IF. \text{ §. 151. Geom.}$$

folglich ist: $\overline{IE}^2 = AI \times IF$, und $\frac{\overline{IE}^2}{AI} = IF$

$CE = AI$ aber ist viermal so gros als die Achse PO der Parabol, oder als die größte Abscisse der größten Ordinate $AC = IE$ oder der Wurfweite selbst, und

$$\text{diese halbe Ordinate } AP = \frac{AC}{2} = \frac{IE}{2}.$$

Wenn wir nun den Parameter der Achse $= p$ annehmen, so ist:

$$\frac{AI}{4} : \frac{IE}{2} = \frac{IE}{2} : p$$

$$\text{und folglich } \frac{\overline{IE}^2}{4} = \frac{AIp}{4}$$

und wenn beiderseits die Divisoren hinweg gelassen werden:

$$\overline{IE}^2 = AIp, \text{ und also } \frac{\overline{IE}^2}{AI} = p$$

wenn nun der oben gefundene gleiche Wehrt im ersten Glied der Gleichung anstatt diesem gesetzt wird, so ist $IF = p$ und also:

$$AI : IE = IE : p.$$

$$\text{oder } CE : AC = AC : p.$$

Folglich ist der Parameter der Achse die dritte Proportional zur Wirkung der Schwere und Wurfweite.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 17. §. 106. Wird AE nur $\frac{1}{4}$ von der Linie der treibenden Kraft angenommen, so ist EM ebenfalls nur $\frac{1}{4}$ von der Wirkung der Schwere am Ende des Wurfs, und folglich der Achse oder der größten Abscisse PO gleich, und wegen den Parallelen AF und ME , wie auch MA und IE ist $ME = AI$ und $MA = IE$; und wir bekommen wiederum:

$$AI : IE = IE : IF. \text{ §. 151. Geom.}$$

$$\text{folglich } IE^2 = AI \times IF \text{ und } \frac{IE^2}{AI} = IF.$$

$$\text{Nicht minder ist: } AI : 2IE = 2IE : p.$$

$$\text{folglich } 4IE^2 = AI \times p.$$

$$\text{und } \frac{IE^2}{AI} = \frac{p}{4}$$

$$\text{daher ist } IF = \frac{p}{4}$$

daß ist IF in dem halben Birkel ist der vierte Teil des Parameters der Achse.

Wenn man also die vorhergehende Aufgabe durch die geometrische Beschreibung auflöst, so kan man sich zur Zeichnung der Parabol gleich des viertel Parameters IF bedienen.

Lehr:

Lehrsatz.

§. 107. Die mit was immer für einer treibenden Kraft erreichte senkrechte Wurfshöhe AD ist die dritte Proportional zu der Würlung der Schwere BC und der Würlung AB der nehmlichen treibenden Kraft eines nach der schiefen Richtung AB geschehenen Wurfs. Fig. 15.

Beweis: Betrachtet, daß ein schwerer Körper in der nehmlichen Zeit durch die Linie AD fallen würde, als er durch dieselbe von der treibenden Kraft hinauf getrieben wird §. 98. derowegen kan man durch sie so wohl die Würlung der Schwere, als auch die Dauerzeit des senkrechten Wurfs, durch AB aber die Dauerzeit des schiefen Wurfs, und durch BC die Würlung der Schwere desselben ausdrücken. Nun aber verhalten sich die Würlungen der Schwere von beiden Würfen wie die Quadrate der Zeiten, d. i.

$$BC : AD = \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2. \text{ §. 42.}$$

$$\text{folglich } \overline{AB}^2 \times AD = \overline{AD}^2 \times BC$$

und wenn beiderseits mit AD dividirt wird, so ist

$$\frac{\overline{AB}^2 \times AD}{AD} = \frac{\overline{AD}^2 \times BC}{AD}$$

$$\text{das ist } \overline{AB}^2 = AD \times BC$$

löset man endlich diese Gleichung in eine Proportion auf, so ist:

$$BC : AB = AB : AD.$$

Z u s a z.

§. 108. Da wir §. 107. erwiesen haben, daß die senkrechte Wurfshöhe zur Würlung der Schwere und der Würlung der nehmlichen treibenden Kraft eines in schiefer Richtung geschehenen Wurfs die dritte Proportional sei, und die Würlung der Schwere allezeit als die größte Abscisse, die Würlung der treibenden Kraft

eines schiefen Wurfs als die größte halbe Ordinate eines Diameters angesehen werden kan §. 84. der Parameter desselben aber ebenfalls die dritte Proportional zu den zweien ist §. 380. Geom. so folget, daß die senkrechte Wurfs- höhe dem Parameter eines Diameters gleich sei, der die Wüftung der Schwere zur Abscisse, die Wüftung der treibenden Kraft aber zur halben Ordinate hat.

Z u s a z.

Fig. 16. §. 109. Da beide Dreiecke ABD und ADF rechtwinklicht sind, und wegen den Parallelen AF und BD der Winkel $FAD = ADB$, so ist auch $AFD = DAB$, folglich sind diese Dreiecke einander ähnlich, und weil sie eine gemeine Seite AD haben, so ist: $BD : AD = AD : AF$.

D. i. der Durchmesser des halben Zirkels den wir §. 102. zur Erfindung der Wurfweiten oder der Erhöhungswinkel gebraucht haben, ist die dritte Proportional zur Wüftung der Schwere, und zu der Wüftung der treibenden Kraft eines schiefen Wurfs; da nun auch die mit der nehmlichen treibenden Kraft erreichte senkrechte Wurfs- höhe oder der Parameter des Diameters die dritte Proportional zu diesen Linien ist, so ist dieser Durchmesser des halben Zirkels der senkrechten Wurfs- höhe oder dem Parameter des Diameters gleich.

A u f g a b e.

§. 110. Wie der Erhöhungswinkel zu finden, um mit einer angenommenen treibenden Kraft auf ein über dem Horizont liegenden Gegenstand, dessen Höhe und Entfernung gegeben, zu werfen?

Fig. 19. Auflösung: durch geometrische Beschreibung:

I. Wenn AB die gegebene horizontale Entfernung und BC die Perpendicularhöhe des Gegenstandes über den

den Horizont, CAB aber der gemessene oder bekante Höhenwinkel ist, so machet vor allen mit einer nach Belieben angenommenen treibenden Kraft (die aber, wie wir in der Folge sehen werden, dennoch hinlänglich sein mus, um die vorgegebene Entfernung in einen gewissen Winkel zu erreichen) in einem beliebigen Erhöhungswinkel einen Probwurf nach einem horizontal liegenden Gegenstand; messet die damit erreichte Wurfweite, und suchet die perpendicularare Wurfshöhe, oder die ihr mit eben dieser Kraft im 90ten Grade erreichen würdet, nach §. 98.

2. Errichtet auf AB die Perpendikular AD , und machet solche der bekant gewordenen Wurfshöhe im 90ten Grade gleich.

3. Beschreibet auf AD als auf einer Sehne einen Birkelbogen AGD , welcher einen Winkel $AFD = AGD = ACF$ mit seiner Spitze am Umkreise fassen kan, folgender Gestalt: nemlich, weil in dem rechtwinklichten Dreieck ABC der Höhenwinkel CAB gegeben ist, so wird euch auch der Winkel ACB , und sein Supplement ACF auf 180° bekant, §. 109. Geom. theilet ACB in zween gleiche Teile, und machet sowohl den Winkel GAD als ADG dem halben Winkel ACB gleich, und suchet mittelst der zwö Sehnen AG und DG den Mittelpunkt O , aus welchen ihr mit dem Radius OA oder OG den Bogen AGD beschreiben könnt. §. 60. Geom. oder noch kürzer: machet $OAD = CAB$, theilet AD in zween gleiche Teile AH und HD , und errichtet in H die Perpendikular OG , so wird der Mittelpunkt O des verlangten Bogens im Durchschnitte der zwö Linien AO und GO sein.

4. Verlängert BC bis sie den gemachten Bogen in zween Orten wie hier in F und E durchschneidet, oder nach Umständen etwan in G nur berührt, und ziehet
 AF

AF und AE, so werden FAB und EAB die zweien Erhöhungswinkel sein, in welchen man mit der beim Probwurf gebrauchten Kraft eben den über den Horizont erhobenen Punkt C erreichen können wird.

Beweis: Ziehet die Linien DF und DE, und betrachtet, daß AD die senkrechte Wurshöhe der angenommenen Kraft sei, und wenn AF und AE die wahren Richtungslinien um in C zu werfen sind, daß FC und EC die Wirkungen der Schwere am Ende der beiden Würfe sind, und wir müssen bekommen:

$$AD : AF = AF : FC$$

$$\text{und } AD : AE = AE : EC. \text{ §. 107.}$$

Um nun dieses zu erweisen, so betrachtet daß der Winkel $AFD = ACF$ vermög der Bedingung, und $DAF = AFC$ wegen den Parallelen AD und CF sei, folglich ist auch $FAC = ADF$, und die Dreiecke ACF und DFA sind einander ähnlich, und weil sie die Seite AF gemein haben, so ist

$$AD : AF = AF : FC. \text{ §. 140. Geomet.}$$

Eben dieses läßt sich von den Dreiecken ACE, und DEA auf die nehmliche Art erweisen, also sind AF und AE die wahren Richtungslinien, und FAB und EAB die zweien Erhöhungswinkel, in welchen mit der angenommenen Kraft der über den Horizont erhobene Ort C erreicht werden kan.

Ereignet es sich, daß die Linie BE den Bogen nur in G berührt, so ist alsdenn der Winkel GAB der einzige, in welchen man in den Punkt C werfen könnte. Geschiehet es aber, daß die Linie BE den Bogen weder durchschneidet, noch berührt, sondern ganz ausser denselben fällt, so ist es ein Zeichen, daß man den Ort C mit der angenommenen Kraft gar nicht erreichen könne.

In

In einem solchen Falle also hat man eine grössere Kraft anzunehmen, mit derselben einen neuen Probewurf zu machen, und übrigens wie gleich gewiesen worden zu verfahren.

Verlangte man auch noch die horizontalen Wurfweiten AP und AM , die man in den zween besagten Erhöhungswinkeln FAB und EAB mit der angenommenen Kraft erreichen würde, zu finden, um die zwei Parabeln ATP , und ARM desto bequemer beschreiben zu können, so beschreibet aus H mit dem Radius HA den halben Birkel DZA , verlängert AE und AF bis an denselben in L und N , lasset aus L und N die Perpendicularen LM und NP auf die Verlängerung von AB fallen, so sind AM und AP die verlangten Wurfweiten §. 102. Theilet nun jede derselben in S und U in zween gleiche Teile, errichtet die Perpendicularen

$$\text{ren } SR = \frac{LM}{4} \text{ und } UT = \frac{PN}{4} \text{ so habt ihr die}$$

Höhen oder die grössten Abscissen der Parabeln, und könnt dieselben nun leicht nach §. 384. Geom. beschreiben.

Auflösung durch die Trigonometrie: 1. Weil der Winkel $OA H = CAB$, und beide Dreiecke AHO und ABC rechtwinklicht sind, so sind sie einander ähnlich, und also kan man setzen:

$$AB : AC = AH : AO$$

$$\text{und } AB : BC = AH : HO$$

$$\text{folglich ist } \frac{AC \times AH}{AB} = AO$$

$$\text{und } \frac{BC \times AH}{AB} = HO$$

oder

3. Beschreibet auf AD als auf einer Sehne einen Birkelbogen AGD , welcher den Winkel $AFD = AGD = ACB$ mit seiner Spitze am Umkreise stehend fassen kan, folgender Gestalt: da auch der Tiefenwinkel BAC gegeben ist, und das Dreieck ACB rechtwinklicht ist, so wird auch auch der Winkel ACB , und sein Supplement ACV auf 180° bekant. Theilet also ACV in zween gleiche Teile, machet so wohl GAD als GDA dem halben Winkel ACV gleich, und suchet mittelst AG und DG als zwei Sehnen den Mittelpunkt O , aus welchen ihr mit dem Radius AO oder OG den verlangten Bogen AGD beschreiben könnt §. 60. Geom. oder kürzer: machet $DAO = CAB$, theilet AD in zween gleiche Teile AH und HD , und errichtet in H die Perpendikular OG , so wird der Mittelpunkt O des verlangten Bogens im Durchschnitte der zwei Linien AO und OG sein.

4. Verlängert CB , bis sie den gemachten Bogen in zween Orten wie hier in F und E durchschneidet, oder nach Umständen etwan in G nur berührt, und ziehet AF und AE , so werden FAB und EAB die zween Erhöhungswinkel sein, in welchen man mit der beidem Probirurf angewandten Kraft den unter dem Horizont liegenden Gegenstand C erreichen wird.

Der Beweis ist gänzlich wie der von der vorhergehenden Aufgabe, und ist das, was daselbst noch besonders angemerkt worden auch hier zu verstehen.

Verlangte man die horizontalen Wurfweiten AM und AP ; die man in diesem Erhöhungswinkel EAM und FAP mit der vorigen Kraft erreichen würde, zu finden, um die zwei Parabeln ARM und ATP um so bequemer beschreiben zu können,

so

so ziehet mit dem Radius HA aus H den halben Birkel DZA, aus L und N, wo die Richtungslinien AE und AF denselben durchschneiden, laßt die Perpendicularen LM und NP auf AB fallen, so sind AM und AP die verlangten Wurfweiten. §. 102. Theilet man nun dieselbe in S und U in zween gleiche Teile, und errichtet die Per-

pendicularen $SR = \frac{LM}{4}$, und $UT = \frac{PN}{4}$ so

habt ihr die Höhen oder die größten Abscissen der Parabolon, und könnt sie nach §. 384. Geomet. beschreiben.

Auflösung durch die Trigonometrie : 1. Das Dreieck AHO ist rechtwinklicht, und der Winkel HAO

ist $= CAB$ und $HA = \frac{AD}{2}$ ist bekannt, folglich auch der Winkel AOH, derowegen ist :

$$\sin AOH : \sin tot = AH : AO$$

$$\text{und also } \frac{\sin tot \times AH}{\sin AOH} = AO$$

$$\text{nicht minder } \sin tot : \sin HAO = AO : HO$$

$$\text{folglich } \frac{\sin HAO \times AO}{\sin tot} = HO$$

ferner ist $HI = AB$, und $HI - HO = OI$.

Dann ist in dem Dreieck OIE die Seite OI und OE $= AO$ bekannt, also ist :

$$OE : OI = \sin tot : \sin OEI$$

$$\text{und } \frac{OI \times \sin tot}{OE} = \sin OEI$$

$$\text{folglich } 90^\circ - OEI = EOI.$$

$$\text{Endlich ist } HOD + DOE + EOI = 180^\circ$$

$$\text{und } 180^\circ - HOD - EOI = DOE.$$

$$\frac{DOE}{2} = DAE$$

und also $DAB = 90^\circ - DAE = EAB$ dem größern Erhöhungswinkel.

ferner ist $EOI = IOF$

$$\text{und } \frac{EOF}{2} = EAF. \text{ §. 77. Geomet.}$$

folglich ist $EAB - EAF = FAB$ dem kleinern Erhöhungswinkel.

Da die Auflösungen einiger der vorhergehenden Aufgaben etwas weitläufig, und daher in der Ausübung unbequem sind, so wollen wir aus nachstehenden Lehrsaß Gründe ziehen, die uns einen kürzern und eben so richtigen Wege, ja auf eine sehr einfache praktische Art führen, obstehende Aufgaben leicht und geschwind aufzulösen.

Lehrsaß.

§. 112. Die Brennpunkte aller durch einerlei Kraft aber in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschriebenen Parabeln eines geworfenen Körpers stehen auf dem Umkreis eines Kreises, der aus dem Ort des Wurfs mit einem Radius, welcher der halben Wurfweite in 45ten Grade, oder der ganzen in 15ten Grade gleich ist, beschrieben wird.

Fig. 21.

Beweis: Es seien AIC und AVD zwei Parabeln, die mit einerlei Kraft aber in verschiedenen Erhöhungswinkeln TAC und XAD beschrieben worden, und AE

perpendicular auf $AD = \frac{1}{4}$ der senkrechten Wurfs-
höhe, die mit eben der Kraft erreicht werden kan. Da

nun $\frac{1}{4}$ dieser Wurfs-
höhe in allen mit einerlei Kraft
und in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschriebenen
Para

Parabolen ihren größten Abscissen mehr $\frac{1}{4}$ des Parameters der Achsen derselben gleich ist §. 106. d. i. weil $AE = LN = LI + IN$, und $AE = MP = MV + VP$ ist, so sind, wenn man $IF = IL$, und $VO = VP = \frac{1}{4}$ des Parameters der Achsen macht, F und O die Brennpunkte der zwei Parabolen §. 358: Geomet. Weil ferner $FA = FC = LN = AE$, und $OA = OD = MP = AE$ ist §. 359. Geomet. so sind $AE, AF, AO = \frac{1}{4}$ der senkrechten Wurfshöhe und Radien eines Zirkels, an dessen Umkreis $EFOC$ die Brennpunkte der zwei mit gleicher Kraft und in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschriebenen Parabolen sich befinden. Da ferner die Wurfweite in 45° gleich der halben senkrechten Wurfshöhe, die Wurfweite in 15° aber gleich $\frac{1}{4}$ dieser Wurfshöhe ist, so ist die Wurfweite in 15° gleich dem Radius AE des Zirkels, auf welchen die Brennpunkte dieser mit einerlei Kraft und in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschriebenen zwei Parabolen sich befinden, und gleich wie dieses von denselben erwiesen worden, so läßt es sich auch von allen übrigen erweisen.

Z u s a z.

§. 113. Da die Winkel EAF und EAO den doppelten Erhöhungswinkeln gleich sind §. 366. Geom. so erhält man die Erhöhungswinkel EAT und EAX , wenn man erstlich mit dem Radius AE aus A den Bogen EFS beschreibt, und ihn mit eben demselben aus C und D in F und O durchschneidet, dann aber die

Bögen EF und EO in zween gleiche Teile teilet, und durch diese Teilungspunkten die Linien AT und AX zieht. Weil ferner der doppelte Erhöhungswinkel von 45° gleich $90^\circ = EAC$ ist, und einer dessen Schenkel durch den Brennpunkt der Parabol geht, so muß der Brennpunkt einer in 45ten Grad beschriebenen Parabol auf die Mitte C der Wurfweite AB selbst fallen, und dieselbe ist also die Ordinate die durch den Brennpunkt geht.

Z u s a z.

§. 114. Da man jede Wurfweite, so kleiner als die in 45° ist, in zween Erhöhungswinkeln erreichen kan, und wir den höhern von beiden bereits §. 113. zu finden gelehrt haben, so erhält man auch den niederern, wenn man die mit dem Radius AE aus A und D beschriebenen Bögen so weit unter AB verlängert, bis sie sich in einem zweiten Ort S durchschneiden, welcher alsdenn der Brennpunkt zur niederen Parabol ist, und teilet man den Bogen SE in zween gleiche Teile, und zieht durch den Teilungspunkt die Linie AR, so wird EAR der niedere Erhöhungswinkel sein, in welchen man die gegebene Weite AD noch nebst dem andern erreichen kan.

A u f g a b e.

§. 115. Wenn die mit einer gewissen Kraft in 45° oder 15° erreichte horizontale Wurfweite bekant; und man verlangt den Erhöhungswinkel zu finden, in welchen man mit der vorigen Kraft eine andere gegebene horizontale Weite erreichen kan.

Fig. 21. Auflösung durch die geometrische Beschreibung:
I. Zieht die Linie AB unbestimt; errichtet an dem einen Ende derselben die Perpendicular AE gleich der gegebenen halben Wurfweite in 45ten oder der ganzen
in

in 15ten Grade, nach einem beliebigen verlängerten Maasstab, und beschreibet mit dem Radius AE den Bogen EOS.

2. Traget die neu gegebene Wurfweite auf die Linie AB aus A in D, und mit einem dem vorigen Radius AE gleichen DQ beschreibet aus D den Bogen QOS.

3. Durchschneiden sich nun beide Bögen in zween Punkten wie hier in O und S, so sind diese Durchschnitte die Brennpunkten der zwei Parabol, in welchen die gegebene Weite AD erreicht werden kan, §. 112. und theilet man die Bögen EO und ES in zween gleiche Teile, und ziehet durch die Theilungspunkte die Linien AX und AR, so sind EAX und EAR die zween verlangten Erhöhungswinkel.

4. Geignet es sich aber, daß sich beide Bögen nur in einem Punkt berühren (welches damals geschieht, wenn die neu gegebene Weite doppelt so gros, als die im 15ten Grad ist) so kan dieselbe nur in 45ten Grad allein erreicht werden, und wenn sich die zween Bögen weder durchschneiden noch berühren, so ist es ein Zeichen, daß die gegebene Weite mit dieser Kraft gar nicht erreicht werden könne.

5. Machet EQ parallel zu AB, und auf AB errichtet durch O und S die Perpendikular PS. Theilet OP in zween gleiche Teile, so ist V der Scheitelpunkt

und $VP = VO = \frac{I}{4}$ Parameter der höhern Pa-

rabol. Eben so findet ihr den Scheitelpunkt und viertel Parameter der niederen Parabol, wenn ihr SP in zween Teile theilet. Nun wird es auch leicht sein die Parabol selbst nach §. 360. Geomet. zu beschreiben.

Trigonometrische Auflösung: Da ihr in dem Dreiecke AMO die Seite AO als die Wurfweite in 15ten Grade, und AM als die Hälfte der gegebenen kennet, so findet ihr den Winkel OAM nach §. 433. Geomet., folglich ist $90^\circ - \text{OAM} = \text{EAO}$, und $\frac{\text{EAO}}{2} = \text{EAX}$ dem Erhöhungswinkel von der Vertical abwärts gerechnet.

Z u s a z.

§. 116. Sollte anstatt der Wurfweite in 15ten oder 45ten Grade eine andere gegeben sein, oder der Probwurf in keinen von beiden Winkeln gemacht können werden, so läßt sich der Radius des zur vorigen Auflösung nöthigen Bogens, d. i. die Wurfweite in 15ten Grade dennoch leicht folgender Gestalt finden, nemlich: errichtet auf der halben gegebenen Wurfweite eine Perpendikular MP, machet den Winkel EAO gleich dem gegebenen doppelten Erhöhungswinkel, so ist der Durchschnittspunkt O des Schenkels dieses Winkels und der Perpendikular MP der Brennpunkt, und AO der verlangte Radius, oder die Wurfweite in 15ten Grad.

Z u s a z.

§. 117. Hätte man die Wurfweite in 15ten Grad bekant, und man verlangte zu wissen welche horizontale Weite man in einem andern gegebenen Erhöhungswinkel erreichen würde, so ziehet die Linie AB, und AE perpendicular darauf; und mit dem Radius, der gleich der Wurfweite in 15ten Grad ist, beschreibt den Bogen EOS, ferner machet den Winkel EAO gleich dem doppelten des gegebenen Erhöhungswinkel, so ist O der Brennpunkt. Setzet hierauf den Zirkel in O und mit der Eröffnung OA durchschneidet AB in D, so ist AD die verlangte Wurfweite. §. 112.

Auf:

A u f g a b e.

§. 118. Wenn die mit einer gewissen Kraft in Fig. 22. 15ten Grad erreichte horizontale Wurfweite bekannt ist, wie der Erhöhungswinkel, in dem man mit eben der Kraft einen über dem Horizont erhobenen Gegenstand treffen kan, zu finden?

Auflösung durch geometrische Beschreibung:

1. Suchet die schiefe Wurfweite AD nach §. 542. Geomet. oder auf was immer für Art; messet auch den Höhenwinkel DAB, so findet ihr die Höhe DB des Obiects über dem Horizont, und die Horizontalweite AB nach §. 435. Trigon.

2. Zieheth AB, und machet sie nach einem beliebigen verüßigten Maasstab der gefundenen horizontalen Wurfweite gleich; errichtet auf derselben die Perpendicularen AE und BQ, und traget die gefundene Höhe des Obiects über dem Horizont aus B in D.

3. Aus A beschreibet mit einem Radius AE, der gleich der Wurfweite in 15ten Grad ist, den Bogen EOS, und aus D mit einem Radius DQ = AE — BD den Bogen QOS, so werden die Durchschnittspunkten O und S beider Bögen die Brennpunkten der zwei Parabolon sein, in welchen man den Gegenstand D erreichen kan, und EAO und EAS sind die doppelten Erhöhungswinkel. Folglich wenn man die Bögen EO und ES in zween gleiche Theile theilet, und durch die Theilungspunkten die Linien AT und AX führet, so sind EAT und EAX die verlangten zween Erhöhungswinkel von der Vertical angerechnet.

4. Ereignet es sich, daß die Bögen anstatt sich zu durchschneiden sich nur in einem Punkte berühren, so ist der Berührungspunkt der Brennpunkt, und der Gegenstand

ist alsdann auch nur in einen Erhöhungswinkel allein zu erreichen. Durchschneiden oder berühren sich aber die Bögen gar nicht, so ist auch nicht möglich den Gegenstand mit dieser Kraft zu erreichen, sondern es muß eine grössere angenommen werden.

5. Auf AB errichtet aus O und S die Perpendikulare CL und FS, führet EQ parallel zu AB, und theilet CO und FG in zween gleiche Theile, so werden die Theilungspunkten I und G die Scheiteln der zwei Parabeln, $CI = IO$ aber, und $FG = GS$ die Viertelparameter sein, und ihr werdet nun die Parabeln leicht nach §. 360. Geomet. beschreiben können.

Der Beweis des Verfahrens gründet sich gänzlich auf den Lehrsatz §. 112.

Trigonometrische Auflösung: 1. In dem Dreieck AOD kennet ihr die schiefe Wurfweite AD, die Wurfweite in 15ten Grad $= AO$, und $OD = AO - BD$; also läßt sich auch der Winkel OAD finden §. 442. Geomet.

2. Addiret ihr zu OAD noch den gemessenen Höhenwinkel DAB, so ist $EAB = 90^\circ - OAB = EAO$, und $\frac{EAO}{2} = EAT$ dem höhern Erhöhungswinkel.

3. Um auch den Erhöhungswinkel der einen Parabel zu finden, so suchet in dem Dreiecke ADS den Winkel DAS wie zuvor. Dann ist $DAS - DAB = BAS$, und $EAB + BAS = SAE$ dem doppelten, und folglich $\frac{SAE}{2} = EAX$ dem niederern Erhöhungswinkel selbst.

Zu

Z u s a z.

§. 119. Obwohl die vorhergehende Aufgab einen **Fig. 23.** Probwurf auf einer horizontalen Fläche und in 15ten Grad als bekannt voraussetzet, und man dergleichen sonderlich in gebürgigten Gegenden sehr oft nicht machen kan, so läßt sich nichts destoweniger auch mit Hülff eines in was immer für einen Winkel und auf einer mit dem Horizont schief liegenden Fläche geschehenen Probwurf erstlich die mit eben dieser Kraft in 15ten Grad zu erreichende horizontale Wurfweite, und dann auch noch der Erhöhungswinkel, in welchen man ein neugegebenes und über dem Horizont liegendes Object erreichen kan, folgender Gestalt finden. Nämlich:

1. Zeichnet ein rechtwinkeliges Dreieck AFC , in welchen AF die schiefe, AC aber die mit dem Probwurf erreichte horizontale Weite, und CF die Höhe des Object's über dem Horizont vorstellet, nach einen beliebigen Maasstab.

2. Errichtet AE perpendicular auf AC , machet EAN gleich dem doppelten Erhöhungswinkel des Probwurfs, und ziehet AN unbestimt,

3. Traget CF aus A im G ; setzet die Zirkelspitze in G , und nehmet auf GN verschiedene Weiten GH , GI , GM u. s. w. und sehet zu, wenn ihr den Zirkel umschlaget, ob die eine Spitze in F eintrifft, d. i. ob $GH = HF$, oder $GI = IF$ u. s. w. bis ihr endlich eine wie GL findet, welche wirklich gleich LF ist; so ist AL die horizontale Wurfweite in 15ten Grade, und L der Brennpunkt der Parabol des Probwurfs §. 112.

4. Beschreibet nun aus A mit dem Radius AL den Bogen ELR ; traget die neugegebene horizontale Weite

aus A in B; errichtet daselbst eine Perpendikular BD, und machet sie der neugegebenen Höhe des Objekts über dem Horizont gleich.

5. Setzet in D ein, und mit einem Radius $DO = AL - BD$ durchschneidet den vorigen Bogen in O, so ist O der Brennpunkt der neuen Parabol, und theilet man den Winkel EAO in zween gleiche Teile, und ziehet durch den Teilungspunkt die Linie AT, so ist EAT der gesuchte Erhöhungswinkel, in welchen man mit der beim Probmurf gebrauchten Kraft die schiefe Weite AD erreichen können wird.

6. Um nun auch die horizontale Wurfweite in 15ten Grade durch die trigonometrische Berechnung zu finden, so betrachtet, daß ihr in dem Dreiecke AGF den Winkel $GAF = 90^\circ - EAL - FAC$ samt der Seite AG und AF kennet, derowegen läßt sich die Seite GF nach §. 440. Geomet. berechnen. Ferners, da $GL = LF$ gemacht worden, so ist $LGF = LFG$, und weil $LGF = GAF + GFA$ §. 91. Geomet. so sind auch in dem Dreiecke GFL die zween Winkel LGF und LFG nebst der Seite GF bekant, also könnt ihr auch die andere GL nach §. 437. Geomet. finden, und dann ist $GL + AG$ gleich der gesuchten, horizontalen Wurfweite in 15ten Grade, ist nun diese einmal bekant, so läßt sich der Erhöhungswinkel EAT für die neugegebene schiefe Weite AD gänzlich nach §. 118. berechnen.

A u f g a b e.

Fig. 24. §. 120. Wenn die mit einer gewissen Kraft in 15ten Grad erreichte horizontale Wurfweite bekant ist, wie der Erhöhungswinkel, in dem man mit eben der Kraft einen unter dem Horizont liegenden Gegenstand erreichen kan, zu finden?

Auf.

Auflösung durch geometrische Beschreibung:

1. Suchet die schiefe Wurfweite AD nach §. 542. Geomet. oder auf was immer für eine andere Art; messet auch den Tiefenwinkel BAD, damit ihr die Tiefe des Objekts BD unter dem Horizont, und auch die horizontale Weite AB nach §. 435. Geom. berechnen möget.

2. Ziehet eine Linie AB, und machet sie nach einem beliebigen verlängten Maasstab der gefundenen horizontalen Wurfweite gleich; errichtet auf derselben die Perpendikularen AE und BQ, und traget die gefundene Tiefe des Objekts aus B in D abwärts.

3. Aus A beschreibet mit einem Radius AE, der gleich der horizontalen Wurfweite in 15ten Grade ist, den Bogen EOS, und aus D mit einem Radius DQ = AE + BD den Bogen QOS, so werden die Durchschnittpunkten O und S beider Bögen die Brennpunkten der zwei Parabeln sein, in welchen man den Gegenstand D erreichen kan, und EAO und EAS sind die doppelten Erhöhungswinkel, folglich wenn man die Bögen EO und ES in zween gleiche Teile teilet, und durch die Teilungspunkten die Linien AT und AX führet, so sind EAT und EAX die verlangten zween Erhöhungswinkel.

Ubrigens ist alhier eben dasienlge wieder zu beobachten, was §. 118. Nr. 4 u. 5. erinnert worden, und der Beweis des Verfahrens gründet sich ebenfalls auf §. 112.

Trigonometrische Auflösung: 1. Nachdem ihr an dem Dreiecke AOD, dessen drei Seiten bekant sind, den Winkel OAD berechnet habt, so ist

$$\angle EAB + \angle BAD - \angle OAD = \angle EAO$$

$$\text{und } \frac{\angle EAO}{2} = \angle EAT \text{ dem grössern Erhöhungswinkel.}$$

2. In dem Dreiecke ADS sind ebenfalls wieder alle drei Seiten bekannt, also läßt sich wie zuvor der Winkel DAS finden, und dann ist $EAB + BAD + DAS = EAS$, und $\frac{EAS}{2} = EAX$ dem kleinern Erhöhungswinkel.

Was wir S. 119. von dem Probwurf auf ein über dem Horizont erhobenes Object und von der Erfindung der horizontalen Wurfweite in 15ten Grade gesagt haben, versteht sich auch Verhältnismässig, wenn der Probwurf auf ein unter dem Horizont liegendes Object geschieht; nur mit dem Unterschied, daß alsdann OD um BD länger als AO wird.

Obwohl die Auflösungen der jetzt angeführten drei Aufgaben soviel möglich einfach sind, so erfordern sie dennoch einige Zeit, und ein ziemlich ruhiges Gemüth; da es aber bei ernstlichen Gelegenheiten oft sowohl an der einem, als auch an dem andern fehlet, so legen wir den Anfängern hiemit ein sehr einfaches Instrument vor, dessen Gebrauch sich gänzlich auf S. 112. gründet, und mittelst welchen ein ieder auch in der Mathematik ungeübter alle oben angeführte Aufgaben auf eine sehr leichte und mechanische Art, fast ohne allen Zeitverlust, und ohne eben ein sehr gesammeltes Gemüth nöthig zu haben, auflösen kan. Es bestehet aber dasselbe eigentlich in folgenden:

Fig. 25.

I. Die ganze Fläche des fig. 25. vorgestellten Instruments ist von 1 oder 2 Linien dicken Messingblech. Der aus dem Mittelpunkt A gezogene Viertelzirkel ist gegen dem außern Rande in 90 Grade, und ieder derselben wieder in 6 gleiche Teile

Teile oder von 10 zu 10 Minuten eingetheilt, in dieser Rücksicht wird der Radius desselben so groß angenommen, daß man diese kleineren Teile noch wohl entscheiden kan. Gegen dem innern Rande ist der Viertelzirkel nur in 45 gleiche Hauptteile getheilt, deren ieder wieder 6 kleinere enthält, damit wenn an der äußeren Einteilung eine gewisse Anzahl Grade und Minuten abgeschnitten wird, man an der innern so gleich die halbe Anzahl erhält; wie die Nothwendigkeit dessen in der Folge erhellen wird.

2. Die Scale ACDB ist in so viele gleiche Teile nach der Linie AB eingetheilt, als man mit einem gewissen in 45ten Grade gerichteten Böller mit der größten Ladung z. B. Kaster erreichen kan; AC und BD aber enthalten ieder etwann nur 100 oder 150 solche Teile. Eben so ist die Scale AEFB eingetheilt, und die sich gegen über stehenden Teilungspunkten sind mit Linien zusammengezogen, davon nur einige nahe am Gradbogen treffende um alle Verwirrung zu vermeiden ausgelassen werden.

3. Das um den Mittelpunkt A des Gradbogens an einem Dorn bewegliche Lineale AI ist mit einer schrägen Kante versehen, darauf so nahe am äußersten Rande derselben als thunlich durch A eine Linie gezogen ist, welche ebenfalls in die nehmliche gleiche Teile wie AB eingetheilt ist, aber nur die halbe Anzahl derselben enthält. Der Mittelpunkt A ist wegen der Dicke des Lineales etwas in die Tiefe ausgesenkt, damit er mit der Fläche der Scale in gleiche Höhe komt. Bei N ist eine Stellschraube angebracht, die durch den aus der Ursach durchaus durchgebrochenen Gradbogen gehet,

Fig. 26.

het, um das Lineal in allen Stellungen befestigen zu können. Die 26. Figur zeigt den Durchschnitt dieser Schraube nach der Länge des Lineals.

Fig. 27.

4. Beim Gebrauch dieses Instruments ist noch ein leichter Stangenzirkel OP fig. 27. dessen Stange ungefähr die Länge von $\frac{AB}{2}$ hat, nebst noch einer halb so langen RS nöthig.

Ubrigens kan das Instrument in ein ganz flaches Futeral dergestalt gerichtet werden, daß es auch bei dem Gebrauche beständig darin verbleiben kan, und man siehet wohl, daß wenn man an das bewegliche Lineale Dioptren anbringt, und das Instrument an seiner untern Fläche so einrichtet, daß man es auf ein Statif befestigen kan, daß es alsdenn auch als ein Winkelmesser zu gebrauchen sei, um die Entfernungen der Gegenstände zu finden.

G e b r a u c h.

Erste Aufgab: Wenn die mit einer gewissen Ladung in 15ten Grad erreichte Wurfweite bekannt ist, wie der Erhöhungswinkel zu finden, in welchen man eine andere gegebene horizontale Wurfweite mit der nehmlichen Ladung erreichen kan?

Fig. 28.

Auflösung: I. Zählet auf der Skale des beweglichen Lineals AI soviel Teile von A gegen I bis O oder C, als ihr bei dem Probwurf in 15ten Grade Klafter erreicht habt; zählet auch auf der horizontal Linie AB der andern Skale soviel Teile von A nach D, als die neuegegebene Wurfweite Klafter enthält, und merket beide Teilungspunkten C und D an.

2. Ergreiftet mit dem Stangenzirkel die Weite $AO = AC$, sehet die eine Spitze in C ein, ziehet das Lineale so lang mit fort, bis die andere Spitze in D einfällt, so schneidet das Lineale in dieser Stellung auf der äussern Einteilung des Grabbogens den doppelten Erhöhungswinkel EAI ab, und auf der innern werdet ihr die Anzahl Grade und Minuten des Erhöhungswinkel selbst nachzählen können.

Zusatz: Wäre nach einem in 15ten Grade geschehenen Probwurf ein anderer Winkel gegeben, und man verlangte zu wissen, welche horizontale Entfernung man mit der vorigen Ladung in demselben erreichen wird, so stellet, und befestiget das Lineale mit der Stellschraube dergestalt, daß EAI doppelt so gros als der gegebene Winkel werde, welches ihr leicht erhaltet, wenn ihr auf der innern Einteilung soviel Grade und Minuten von E gegen C zählet, als der gegebene Erhöhungswinkel haben sol; nehmet $AC = AF$ der Probwurfweite mit dem Zirkel, lasset eine Spitze in C stehen, und mit der andern durchschneidet die horizontale Linie AB in D, so wird AD die Anzahl Klafter enthalten, welche ihr in dem gegebenen Winkel mit der vorigen Ladung erreichen könnt.

Zusatz. Ist man durch Umstände verhindert den Probwurf eben in 15ten Grade zu machen, man kan aber anstatt in diesem in einen andern Erhöhungswinkel werfen, und die damit erreichte Wurfweite AD messen, so läßt sich nichts destoweniger die Wurfweite AF des 15ten Grades, oder vielmehr der Radius AC des Zirkels, worauf der
Brenn

Brennpunkt der Parabel fallet, folgender Gestalt finden: nemlich stellet das Lineale auf den doppelten Erhöhungswinkel EAI des gethanen Probwurfs, und befestiget dasselbe; nehmet mit dem Zirkel die Hälfte AN der bekanten Wurfweite AD , sehet beiläufig in der Gegend von C auf der Skale des Lineals in unterschiedene Teilungspunkten ein, bis ihr einen eben wie C findet, der so weit von der Linie AE abstehet, als die halbe Wurfweite AN beträgt, welches ihr durch einen mit der Eröffnung AN des Zirkels aus C gegen I gemachten Bogen, der die Linie AE nur berühren mus, leicht erfahret, so wird AC die verlangte Wurfweite in 15ten Grad anzeigen, und nun läßt sich die obige Aufgabe eben so auflösen, als wenn der Probwurf in 15ten Grade geschehen wäre.

Ubrigens ereignet es sich, daß die neugegebene Wurfweite grösser als die doppelte des Probwurfs in 15ten Grade ist, so läßt sich dieselbe mit dieser Ladung auch in 45 Grad folglich gar nicht erreichen, und mus folglich eine stärkere Ladung angenommen werden.

Zweite Aufgab: Wenn die mit einem Probwurf in 15ten Grad erreichte horizontale Weite bekant ist, und es wird ein über oder unter dem Horizont liegender Gegenstand zu bewerfen gegeben; wie in solchen Falle der Erhöhungswinkel zu finden?

Auflösung: 1. Suchet euch sowohl den Höhen oder Tiefenwinkel, welchen der Gegenstand mit dem Horizont macht, als auch die horizontale Ent-

Entfernung nebst der Höhe oder Tiefe nach den in der Trigonometrie hinlänglich und verschiedenen gegebenen Anleitungen, oder auf was immer sonst für eine Art bekannt zu machen.

2. Ist der Gegenstand über den Horizont er- Fig. 29.
hoben, so zählet von A gegen B zu so viele Teile auf der Skale bis F, als die horizontal Entfernung Aaaster enthält, und von F perpendicular aufwärts so viele Teile bis D, als die Höhe des Gegenstandes über den Horizont beträgt, und merket indessen den Punkt D.

3. Traget die bekannte Wurfweite in 15ten Grad aus A in C, und die Höhe des Gegenstandes FD aus A in L; ergreifet mit dem Zirkel die Weite LC, bleibet mit der einen Spitze in C stehen; ziehet das Lineale mit derselben so lang nach, bis die andere Spitze in D einfällt, so ist EAI der doppelte Erhöhungswinkel, in welchem ihr den erhobenen Gegenstand D erreichen könnt, und ihr werdet auf der innern Einteilung des Gradbogens so gleich die Anzahl Grade und Minuten, so ihr dem Erhöhungswinkel selbst geben müßet, nachzählen können.

4. Wäre aber der Gegenstand unter dem Horizont gelegen, so nehmet auf AB so viele Teile AH als dessen horizontal Entfernung Aaaster beträgt, desgleichen soviel Teile HG als seine Tiefe Aaaster enthält, und bemerket indessen den Punkt G. Machet AC gleich der Probwurfweite in 15ten Grad, und $AN = HG$; ergreifet mit dem Zirkel die Weite NC, bleibt mit der einen Spitze in C stehen, ziehet das Lineale so
 Unterb. Mechanik, III. Th. G lang

lang damit fort, bis die andere Spitze in Q einfällt, so schneidet das Lineale in dieser Stellung ebenfalls den doppelten Erhöhungswinkel EAI ab, und auf der innern Einteilung könnt ihr die Anzahl der Grade und Minuten des Erhöhungswinkels selbst nachzählen.

Zusatz: Da man sonderlich in gebürgigten Gegenden nicht allezeit Gelegenheit haben dürfte, einen Probwurf auf einer horizontalen Ebene zu machen, so kan man denselben auch in einem beliebigen Winkel und gegen ein über oder unter dem Horizont liegendes Object verrichten. Suchet euch hierauf dessen horizontale Entfernung und die Höhe oder Tiefe über oder unter dem Horizont durch die Trigonometrie bekant zu machen; nehmet auf der Linie AB soviel Teile AF als die horizontale Entfernung, und, wenn es ein erhobener Gegenstand ist, auf FD soviel als die Höhe desselben beträgt; stellet hierauf das Lineal auf den doppelten Erhöhungswinkel EAI des Probwurfs, traget FD aus A in L , probiret mit dem Zirkel aus L gegen C verschiedene Weiten, bis ihr eine wie LC findet, die gleich CD ist; d. i. wenn ihr mit der Eröffnung LC des Zirkels in C einsetzet, daß die eine Spitze in D eintrefe, so ist AC gleich der verlangten horizontalen Wurfweite in 15ten Grad. Wäre aber der Probwurf nach einem tiefliegenden Object geschehen, so traget dessen Tiefe HG aus A in N , und suchet ebenfalls wieder eine Linie NC die gleich CG ist; wie gleich oben gesagt worden, so wird AC wieder die verlangte horizontale Wurfweite in 15ten Grad oder vielmehr der Radius eines Zirkels sein, auf den alle Brennpunkte der Parabeln fallen,

welch

welche durch einerlei Kraft und in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschrieben werden können, folglich läßt sich nun auch mit Hülfe dieses Probwurfs der Erhöhungswinkel für was immer für eine Entfernung, und der Gegenstand mag auch über oder unter dem Horizont liegen, wie in der zweiten Aufgabe gewiesen worden, finden.

Ubrigens verstehet es sich von selbst, wenn ein Gegenstand soweit entfernt ist, daß man denselben mit der erforderlichen Weite CL oder CN in dem man in C einsetzet, nicht durchschneiden kan, man mag das Lineal gleich nach sich ziehen wie man wil, daß alsdenn die Ladung zu schwach ist.

A u f g a b e.

§. 121. Wenn von einem nach horizontaler Richtung AB geschehenen Wurf oder Schuß sowohl die damit erreichte horizontale Weite $AB = ED$ und auch die Wirkung der Schwere $BD = AE$ bekant, oder gemessen worden, und es wird eine andere kürzere Entfernung EI aber in eben dem Horizont gegeben; wie sowohl der Senkungswinkel BAN unter dem Horizont, als auch der Erhöhungswinkel RAB in welchen beiden man mit voriger Ladung die gegebene Entfernung erreichen kan, zu finden? Fig. 30.

Auflösung durch geometrische Beschreibung:

I. Zieheth eine Linie AB gleich der horizontalen Probwurfweite; errichtet AE gleich der Wirkung der Schwere perpendicular darauf, verlängert sie gegen P, und ziehet ED parallel zu AB, und DB zu AE, so ist AE die größte Abscisse und ED die halbe Ordinate der Parabol des horizontalen Probwurfs oder Schuß.

2. Suchet zu AE und ED eine dritte Proportional §. 133. Geomet. so ist solche der Parameter der Parabol §. 351. nehmet davon den vierten Teil, und beschreibet damit als mit einem Radius AF aus A den Bogen $OFCP$, so ist A der Scheitel, F der Brennpunkt der Parabol AD , P aber der Punkt durch welchen die Direktrix gehet, §. 358. Geomet.

3. Zu AB zieht die Parallel GM durch P , und aus I errichtet die Perpendikular IH auf ED ; mit dem Radius IH beschreibet aus I den Bogen HCO ; so sind die zween Durchschnittpunkten C und O die Brennpunkten der zwei neuen Parabolten.

4. Theilet den Bogen PC in T und PO in S in zween gleiche Teile, und ziehet durch die Theilungspunkten die Linien AR und AN , so ist RAB der verlangte Erhöhungswinkel, und BAN der Senkungswinkel.

5. Um auch noch beide Parabolten zu beschreiben, lasset erstlich durch C auf AB eine Perpendikular VQ fallen, theilet VC in zween gleiche Teile, so ist U der Scheitelpunkt der Parabol AUI des Erhöhungswinkels, und ihr könnt sie nach §. 360. Geom. beschreiben. Ferner führet zu EP durch O die Parallel OG , theilet sie in zween gleiche Teile, so ist X der Scheitelpunkt zu dem Stück AI der Parabol für dem Senkungswinkel, und da G der Punkt ist, durch welchen die Direktrix gehet, so kan die Beschreibung ebenfalls nach §. 360. Geomet. geschehen.

Trigonometrische Auflösung: I. Um den Erhöhungswinkel RAB zu finden, betrachtet, daß in dem rechtwinklichten Dreieck AEI die Seite AE als die Wirkung der Schwere, und EI als die gegebene
Weis

Seite bekannt sei, derowegen findet ihr AI und auch den Winkel EAI nach §. 432. Geomet. und $EAB = 90^\circ - EAI = IAB$.

2. In dem Dreieck AIC ist $AC = \frac{1}{4}$ Parameter des Probwurfs; $IC = HI = AP + AE$ d. i. gleich $\frac{1}{4}$ Parameter mehr der Würfung der Schwere; und AI ist aus dem vorigen Dreieck bekannt, also findet ihr den Winkel CAI nach §. 442. Geom.

3. Ist $PAB + BAI - CAI = PAC$, und $\frac{PAC}{2} = PAR$, folglich $PAB = 90^\circ - PAR = RAB$ dem Erhöhungswinkel.

4. Um den Senkungswinkel BAN zu finden, so betrachtet, daß auch in dem Dreieck AIO die Seite $AO = \frac{1}{4}$ Parameter des horizontalen Wurfs;

$IO = IH = \frac{1}{4}$ Parameter mehr der Würfung der Schwere $IY = BD$, und AI aus dem Dreiecke AEI bekannt sei, derowegen läßt sich der Winkel OAP nach §. 442. Geomet. berechnen.

5. Endlich ist $OAI + IAB + BAP = OAP$, und $\frac{OAP}{2} = PAN$, also $PAN - PAB = BAN$ dem Senkungswinkel.

Wir übergehen die weitere Ausdehnung dieser Aufgabe, weil sie wenigstens beim Bomben werfen, als wo keine horizontale noch weniger aber eine gesenkte Richtung statt haben kan, nicht anwendbar ist; und bei Haubizen und Stücken ändert

bert der Widerstand der Luft die Wurfsweiten so gewaltig, daß man in der Ausübung mit dieser Bestimmungsart nicht wohl zu recht kommt. Diese Aufgabe wird also nur hergesetzt, um den Anfängern zu zeigen, daß der §. 112. gegebene Lehrsatz sich auch auf die horizontalen und gesenkten Schüsse noch anwenden liesse, wenn die hindernden Nebenursachen so dabei vorkommen, nicht so groß wären.

Es ist kein Zweifel, daß man mittelst den in diesem Lehrgebäude gegebenen Regeln die Bomben und Kugeln mit erwünschter Richtigkeit nach einem gegebenen Ziele werfen und schießen können würde, wenn nicht so viele Nebenursachen als Hindernisse, wie bei vielen andern Unternehmungen nur allzu oft zu geschehen pflegt, sich bei der Ausübung einfänden. Damit die noch unerfahrenen Anfänger um so mehr einsehen mögen, daß man ihnen diese Regeln nicht als unumstößliche Wahrheiten aufzubringen, sondern nur als eine Annäherung zur Wahrheit anzubieten suche, so wollen wir sie in folgenden mit den wichtigsten Nebenursachen, welche die Würfe und Schüsse so oft von den Regeln abirren machen, vorläufig bekannt machen, daß übrige aber bis zur Aerometrie versparen.

Ersten: Wird in dem gegebenen Lehrgebäude überhaupt angenommen, daß die treibende Kraft; oder die Kraft des Pulvers für sich allein betrachtet eine gleichförmige Bewegung herfürbringe; da man aber durch vielfältige Erfahrungen überzeugt ist, daß die Luft den geworfenen Körpern gewaltig widersteht, so muß nothwendig ihre anfänglich von der Kraft des Pulvers erhaltene Geschwindigkeit sich alle Augenblicke vermindern, und
also

also eine abnehmende Bewegung entstehen; sobald aber diese statt hat, so kan der geworfene oder geschossene Körper keine wahre Parabol beschreiben, sondern muß einer andern Art von krummen Linien in seinem Fluge folgen, und alle Wurf und Schußweiten müssen kürzer ausfallen, als sie durch die gegebenen Regeln, indem man die Fluglinie als eine Parabol ansieht, bestimmt werden. Viele gelehrte Männer haben sich Mühe gegeben, die eigentliche Fluglinie der in der Luft geworfenen und geschossenen Körper zu bestimmen, und man hat von ihnen durch Hülfe der höhern Mathematik hierüber schon mehrere schöne Erfindungen erhalten. Allein! da die nähere Kenntniss der Eigenschaften der Luft unglücklicher Weise noch ziemlich mangelhaft, folglich die eigentliche Grösse des Widerstandes derselben gegen geworfene oder geschossene Körper noch nicht sicher ausgemacht ist; nebst diesem auch die anfängliche Geschwindigkeit dieser Körper sehr schwer in allen Fällen richtig genug bestimmt werden kan, welche beide Stücke zur Bestimmung der wahren Fluglinie doch unumgänglich nöthig sind, so müssen auch diese an sich sehr schöne Erfindungen bisher noch größten Theils auf der Voraussetzung einer gewissen Grösse des Widerstandes, und der anfänglichen Geschwindigkeit so lang beruhen, bis die menschliche Kenntniss hierinnen noch mehr erweitert sein wird.

Warum wir aber das Lehrgebäude von geworfenen Körpern, in welchen die Fluglinie als eine Parabol angesehen wird, in gegenwärtigen Anfangsgründen vor andern angenommen haben, geschieht nicht soviel, als ob wir demselben einen wirklichen Vorzug vor den übrigen später erfundenen

nen einzuräumen gedächten, sondern erstlich: weil zur Behandlung der letztern die höhere Gründe der Mathematik erfordert werden, und die dem gegenwärtigen Werke eigens vorgeschriebenen Gränzen bis dahin zu gehen uns nicht erlauben. Zweiten: weil die bei dem erstern in der Ausübung vorkommende Berechnungen viel einfacher, und in dem Getümel einer Batterie viel leichter als in allen bisher erfundenen übrigen auszuführen möglich sind, und damit dennoch eine noch ganz erträgliche Richtigkeit wenigstens beim Werfen erhalten wird; sonderlich aber wenn man den Probwurf so einzurichten sucht, daß man mit demselben die neugegebene Wurfweite schon beinahe erhält, oder daß die Elevationswinkel des Probwurfes und des neu zu machenden Wurfes nicht sehr viel von einander unterschieden sind; welches entweder aus schon bekannten Versuchen, und bei Handen habenden Wurftafeln, oder durch zween Probwürfe eben nicht schwer zu bewürken ist.

Zweiten: Man mag annehmen, daß die geschossenen oder geworfenen Körper entweder eine Parabol beschreiben, oder man mag ihre wirkliche Fluglinie nach was immer für einer andern Art bestimmen, so muß man doch bei allen Berechnungen der Schuß und Wurfweiten, oder der Elevationswinkel derselben nothwendig voraussetzen, daß gleiche Pulverladungen in einem nehmlichen Geschütze gegen gleiche Kugeln oder Bomben auch gleiche Kräfte ausüben. Wer aber nur einige Erfahrung von den Eigenschaften des Pulvers hat, der wird auch wissen, daß hierzu unumgänglich erforderlich sei, daß das Pulver sowohl in Ansehung seiner innerlichen Beschaffenheit und Güte, als seiner

Trop

Trockenheit, und Grösse seiner Körner durchaus gleich seie; daß die Ladung in dem Geschütze allezeit gleiche Lage erhalte, und auf gleiche Art durch eine gleiche Menge Feuerfunken entzündet werde. Fehlet nur eine von diesen Bedingungen, so geschieht die Entzündung der Pulverladung nicht ein wie das anderemal, die Kugel oder Bombe erhält eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit, und die Voraussetzung ist nicht mehr richtig.

Dritten: Nicht minder muß bei der Berechnung der Schuß und Wurfweiten oder ihrer Elevationswinkel vorausgesetzt werden, daß alle Kanonkugeln und Bomben nicht allein von gleichen Durchmesser und Schwere sind, sondern auch daß der Mittelpunkt ihrer Schwere sich an den Kanonkugeln in ihrer Mitte, an den Bomben aber auf der durch das Brandloch gehenden Achse befinde. Sind aber diese Körper in einer dieser Eigenschaften merklich unterschieden, wie es wirklich nicht selten geschieht, so sehr auch ihre Erzeugung schon verbessert worden ist, so wird die Voraussetzung absonderlich unrichtig.

Vierten: Muß man ebenfalls annehmen, daß die Kugeln und Bomben bei dem Abfeuern allezeit in der Richtung abfahren, welche dem Geschütze gegeben worden ist; allein, da man denselben bisher noch immer einen beträchtlichen Spielraum lassen mußte, so können sie oft aus verschiedenen zufälligen Ursachen im herausfahren an die eine Wand der Seele angeschleibert, und also nach der entgegen gesetzten Seite von ihrer wahren Richtung abgetrieben werden, welches durch die an dem Geschütze öfters zurückgelassene sehr sicht-

baren Merkmale oder Streifen an dem Metalle augenscheinlich beſtätiget wird. Da über dieſes bei der Entzündung der Ladung, ſonderlich wenn ſie etwas ſtärker, oder das Geſchüß von leichterer Art iſt, eine gewaltige Erſchütterung erfolgt, bei den Böllern auch ein häßlicher Druck gegen die Betungen geſchiehet, bei welchen man nicht wohl vorausſetzen kan, daß alle Theile derſelben gleich viel widerſtehen, ſo iſt ſehr begreiflich, wie manchemal die Kugeln oder Bomben eine andere Richtung, als dem Geſchüße gegeben, oder in der Berechnung angenommen wird, erhalten können.

Sünſten: Da endlich die Beſchaffenheit der Luſt in die Bahne der geſchoſſenen oder geworfenen Körper ebenfalls ihren Einfluß hat, ſo iſt auch noch nöthig, daß man ſie ſtets von gleicher Dichtigkeit und Stille annehme. Obwohl zwar in derſelben in ſehr kurzer Zeit, und gewöhnlicher Weiſe eben keine ſehr merkliche Veränderungen vorzugehen pflegen, ſo findet man ſie doch öfters von Früh bis Mittag, ja auch manchemal ſchon von einer Stunde zur andern ſo verſchieden, daß ſie durch ihren verſchiedenen Widerſtand die berechnete Bahne der geſchoſſenen oder geworfenen Körper gar wohl auf eine merkliche Art verändern kan.

Aus dieſen angeführten Nebenurſachen und Hinderniſſen werden die Anfänger leicht ſchließen, daß die Unrichtigkeit im Werfen eben nicht ſoviel von der Berechnungsart, als von den vorkommenden neben Urſachen herrühren, die Sich durch keine Berechnung heben oder beſtimmen laſſen; ja die Abirrungen werden noch weit beträchtlicher ſein, wenn mehrere zuſammen kommen, und ſich einander nicht zufälliger Weiſe wieder größten Theils ſelbſt aufheben, oder vernichteten.

Fünf



Fünftes Hauptstück.

Von dem Stöße der Körper.

Erklärung.

§. 122. Ein grader Stoß eines Körpers gegen einen andern ist derienige, wenn die Richtungslinie der Bewegung des ersten senkrecht auf den andern auftrifft, und durch beider Mittelpunkte geht.

Ein schiefer Stoß aber ist, wenn die Richtungslinie des stossenden Körpers auf den andern schief auftrifft, oder nicht durch den Mittelpunkt geht.

3. B. Wenn die Kugel A dergestalt gegen die Kugel B stößet, daß ihre Richtungslinie CD durch die Mittelpunkte beider Kugeln geht, und folglich senkrecht auf die andere trifft, so wird ein grader Stoß entstehen; geht aber die Richtungslinie EF nicht durch den Mittelpunkt von B, so wird sie von der Kugel A schief gestossen.

Fig. 31.

Lehrsatz.

§. 123. Wenn ein nicht elastischer Körper A an einen andern ebenfalls nicht elastischen B, der sich langsamer aber in der nehmlichen Richtung wie der erste bewegt, stößet, so ist die Summe der Bewegungskräfte von beiden nach dem Stöße gleich der Summe derselben vor dem Stöße.

Beweis: Es sei die Bewegungskraft des Körpers A vor dem Stöße $= Q$, die von B $= q$; so ist ihre Summe $= Q + q$. Wenn nun A an B stößet, so wider-

Hauptstück.

1 ihn würket, §. 17., und
I nennen; da nun dieselbe
gen ist, so verliert A nach
angskraft, und dieselbe ist
ner auch A in B eben so
Würkung aber der Rich-
nicht entgegen ist, sondern
gewinnet B an der Be-
ird nach dem Stosse $= q$
nun die Bewegungskräfte
tose zusammen, so siehet
 $- d = Q + q$ seie.

Z u s a z.

§. 124. Ist der Körper vor dem Stoß in Ruhe,
so ist seine Kraft der Bewegung damals $= 0$, und
wenn des Körpers A seine $= Q$ ist, so ist ihre Sum-
me von dem Stosse $= Q + 0$, ferner ist wegen der
gegenseitigen Würkung der Körper die Kraft der Be-
wegung von A nach dem Stosse $= Q - d$, und von
B $= 0 + d$, und folglich ihre Summe $= Q - d$
 $+ d$, d. i. die Summen der Kräfte der Bewegung
sind vor und nach dem Stosse gleich, wenn ein nicht
elastischer Körper an einen eben solchen ruhenden
stosset.

Lehrsatz.

§. 125. Wenn zween Körper sich nach entgegengesetz-
ter Richtung bewegen, und stossen, so ist der Unterschied
ihrer Bewegungskräfte vor dem Stosse gleich der Sum-
me derselben nach dem Stosse.

Beweis: Wenn man die vorige Benennungen bei-
behält, und annimmt, daß $Q > q$ seie, so ist der Un-
terschied der Bewegungskräfte von A und B vor dem
Stoß

Stoß $= Q - q$. Weil nun beide Körper entgegengesetzte Bewegungen haben, so wird die grössere Bewegungskraft die kleinere gänzlich aufheben, und auch noch den Körper B nach der Richtung des ersten mit einer Kraft d mit fortführen; folglich wird wegen dem auch nach dem Stosse noch anhaltenden Widerstand des Körpers B gegen A die Kraft der Bewegung des letztern nach dem Stosse $= Q - q - d$ sein. Addirt man nun die in jedem Körper nach dem Stosse noch vorhandenen Kräften zusammen, so siehet man, daß $Q - q - d + d = Q - q$ sei. Auf eine ähnliche Art läßt sich das nehmliche erweisen, wenn man $Q < q$ annimmt.

Z u s a z.

§. 126. Haben zween nach entgegengesetzter Richtung sich stossende Körper A und B gleiche Massen, und Geschwindigkeiten, so sind auch die Bewegungskräfte Q und q vor dem Stosse einander gleich §. 28., folglich ist ihr Unterschied $= 0$; da nun gleich erwiesen worden, daß der Unterschied der Bewegungskräfte vor dem Stosse gleich der Summe derselben nach dem Stosse sei, so muß nothwendig nach dem Stosse in gegenwärtigen Falle keine Bewegungskraft mehr vorhanden sein, sondern beide Körper müssen in die Ruhe kommen.

Lehrsatz.

§. 127. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern ruhenden von eben der Art gerade anstosset, so verhält sich die Geschwindigkeit nach dem Stosse zu der Geschwindigkeit vor dem Stosse, wie die Masse oder das Gewicht des erstern zu der Summe der Massen oder der Gewichte von beiden.

Be-

Beweis: Es sei die Masse des Körpers $A = M$; seine Geschwindigkeit vor dem Stöße $= C$; also ist dessen Kraft der Bewegung $= MC$ §. 28., ferner sei die Masse von $B = m$, seine Geschwindigkeit und Kraft der Bewegung aber ist nach der Bedingung $= 0$; folglich ist die Summe der Bewegungskräfte sowohl vor als nach dem Stöße $= MC$ §. 124. Weil nun B sich nach dem Stöße nicht langsamer als A bewegen kan, und auch nicht geschwinder, weil ihm A nicht mehrere Geschwindigkeit geben kan, als er selbst hat, so werden beide Körper nach dem Stöße mit gleicher Geschwindigkeit fortgeführt, und die Summe ihrer Massen ist $= M + m$; weil ferner die Kraft der Bewegung aus dem Produkt der Masse in die Geschwindigkeit bestehet, §. 28., so ist $\frac{MC}{M + m} = c$ der Geschwindigkeit nach dem Stöße, und folglich ist auch $MC = Mc + mc$ und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, so ist $c : C = M : M + m$.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 128. Sind die Massen M und m beider Körper einander gleich, so ist die Geschwindigkeit nach dem Stöße $c = \frac{MC}{2M}$, und folglich wiederum.

$$c : C = M : 2M.$$

daraus ersehet man, daß die Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stöße nur halb so groß als die von A vor dem Stöße ware.

L e h r s a t z.

§. 129. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern sich langsamer aber in eben der Richtung bewegen.

genden Körper gerade stösset, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse gleich der Summe der Bewegungskräfte dividirt durch die Summe ihrer Massen oder Gewichte.

Beweis: Wenn wir die vorhin gebrauchten Benennungen beibehalten, so ist die Summe der Bewegungskräfte beider Körper sowohl vor als nach dem Stoß $= MC + mc$ §. 123. und folglich ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= \frac{MC + mc}{M + m}$ §. 28.

Lehrsatz.

§. 130. Wenn zweien unelastische Körper von gleicher Masse mit verschiedener Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung gerade an einander stossen, so daß der geschwindere den langsamern nach dem Stosse mit sich fortführet, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse gleich dem halben Unterschied ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stosse.

Beweis: Wenn man die Masse eines jeden der beiden Körper A und B mit M, und ihre Geschwindigkeiten wie zuvor benennen, so ist die Kraft der Bewegung von A $= MC$, die von B $= Mc$, und also ihr Unterschied $= MC - Mc$; dieser aber ist gleich der Summe der Kraft der Bewegung nach dem Stosse §. 125. also ist die Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{MC - Mc}{2M}$, d. i. $\frac{C - c}{2}$; da aber der Unterschied der Geschwindigkeit vor dem Stosse $= C - c$ ist, so ist klar daß $\frac{C - c}{2}$ nur die Hälfte davon sei.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 131. Wäre, anstatt daß die Massen gleich angenommen werden $M : m = c : C$, so ist $MC = mc$, und $MC - mc = 0$, d. i. wenn die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten in verkehrter Verhältnis derselben stehen, so sind die Kräfte der Bewegung beider Körper vor dem Stöße gleich; und ihr Unterschied ist folglich $= 0$; nun aber ist der Unterschied gleich der Summe der Bewegungskräfte nach dem Stöße, §. 125. und also iene ebenfalls $= 0$; also wenn die Massen ungleich sind, und die Geschwindigkeiten stehen in verkehrter Verhältnis der Massen, so höret die Bewegung nach dem Stöße gänzlich auf.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 132. Nimt man an, daß die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten vor dem Stöße gleich sind, so ist die Kraft der Bewegung des ersten Körpers vor dem Stöße $= MC$, die des andern $= mC$, und ihr Unterschied $= MC - mC$; weil nun dieser der Summe der Bewegung nach dem Stöße gleich ist §. 125., so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach

dem Stöße $= \frac{MC - mC}{M + m}$ §. 129.

und folglich $\frac{MC - mC}{M + m} : C = M - m : M + m$,

d. i. die Geschwindigkeit nach dem Stöße verhält sich zur Geschwindigkeit vor dem Stöße, wie der Unterschied der Massen zu ihrer Summe.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 133. Sind die Massen sowohl als die Geschwindigkeiten auf was immer für Art ungleich, so ist die Kraft

Kraft der Bewegung vor dem Stosse des ersten $= MC$
und des andern $= mc$, und ihr Unterschied $= MC$
 $- mc$. Dieser aber ist gleich der Summe der Be-
wegungskraft nach dem Stosse, §. 125. also ist die
Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{MC - mc}{M + m}$ d. i.

gleich dem Unterschied der Kraft der Bewegung vor
dem Stosse dividirt durch die Summe der Massen.

Aufgabe.

§. 134. Wie die Bewegungskraft zu finden, die
ein Körper bei dem anstossen an einen andern verloren
hat?

Auflösung: 1. Multipliciret die Masse des Kör-
pers durch die gehabte Geschwindigkeit vor dem Stosse,
um die Kraft der Bewegung vor dem Stosse zu er-
halten.

2. Multiplicirt auch die Masse desselben durch die
ihn nach dem Stosse übrig gebliebene Geschwindigkeit,
so bekommt ihr die Kraft der Bewegung nach dem Stosse.

3. Ziehet die letztere von der erstern ab, so zeigt
der Unterschied was von der Bewegungskraft durch dem
Stosse verloren gegangen.

Wie die nach dem Stosse übrig bleibende Ge-
schwindigkeiten zu finden, erhellet aus §. 127.
und folgenden §§.

Grundsatz.

§. 135. Wenn ein unelastischer Körper an einen
andern, der nicht weichen kan stösset, so höret seine
ganze Bewegung auf.

Erklärung.

Fig. 32. §. 136. Wenn ein Körper A schief gegen eine Fläche DE in einen Punkt B stößet, und wieder davon gegen C abprellet, so wird der Winkel ABD, den die Richtungslinie AB mit DB machet, der Einfallwinkel (Angulus incidentiæ) genent; der Winkel CBE aber den die Richtungslinie BC beim abprellen mit BE machet, heisset der Abprellwinkel (Angulus reflexionis).

Lehrsatz.

§. 137. Wenn ein Körper A gegen einen andern DE, der nicht weichen kan, senkrecht, d. i. nach der Richtung AD anstößet, und einer oder alle beide sind elastisch, so wird A mit der nehmlichen Geschwindigkeit und Richtung von D wieder gegen A zurück getrieben, mit welcher er angestossen hat.

Beweis: Wenn beide Körper nicht elastisch wären, so würde die ganze Kraft des Körpers A nach dem Stöße vernichtet sein, und seine Bewegung gänzlich aufhören, §. 135. also wendet derselbe seine ganze Kraft an; den elastischen Körper zusammen zu drücken; so bald aber die Kraft des Körpers A in der Zusammendrückung sich erschöpft hat, so suchet der elastische Körper sich mit eben der Kraft, als er zusammen gedrückt worden, wieder in seinen vorigen Zustand zu setzen §. 7. N. 5.; also muß der Körper A mit eben der Geschwindigkeit, mit welcher er angestossen hat, wieder zurückgetrieben werden, und weil sich der elastische Körper wieder nach eben der Richtung herstellt, als er gedrückt worden, so muß auch der Körper A nach eben der Richtung wieder zurückgetrieben werden, nach welcher er angestossen hat.

Zu-

Z u s a z.

§. 138. Sind beide Körper elastisch, so werden sie bei ihrem Stöße auch beide gegenseitig zusammen gedrückt, und suchen sich nach demselben mit der nehmlichen Kraft wieder herzustellen. Weil nun der Körper DE nicht weichen kan, so wird der Körper A mit der vorigen Geschwindigkeit und Richtung von D nach A wieder zurückgetrieben.

Lehrsatz.

§. 139. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern DE, der nicht weichen kan, schief stößet, so springt er nach dem Stöße dergestalt zurück, daß der Einfallwinkel dem Abprellwinkel gleich ist. Fig. 32.

Beweis: Wenn man die Kraft, mit welcher der Körper A gegen B anstößet, durch die Linie AB ausdrückt, so kan man sie auch als aus zweien Kräften AH und AD zusammengesetzt ansehen §. 36.; Weil nun die Kraft AH zu DE parallel ist, so verlieret sie durch den Stöße nichts, sondern ist nach demselben noch ganz vorhanden, und weil die Kraft AD senkrecht gegen DE würfet, so erschöpft sie sich durch den Stöße gänzlich; weil aber der elastische Körper A durch den Stoß zusammengedrückt wird, und sich nach demselben wieder in seine vorige Figur herzustellen sucht, §. 7. Nr. 5. so mus er von DE mit der vorigen Kraft als er angestossen hat, zurück springen, und man kan die nach dem Stöße vorhandene Kraft durch die zwei Kräfte $BE = AH$ und $BH = AD$ vorstellen. Weil aber der Körper keiner von beiden Richtungen BE und BH sondern der Diagonal BC folget, §. 32. so wird er nach dem Stöße eigentlich in der Richtung BC abprellen.

widersteht A soviel, als B in ihn würtet, §. 17., und diese Würtung wollen wir d nennen; da nun dieselbe der Richtung A gerade entgegen ist, so verliert A nach dem Stöße an seiner Bewegungskraft, und dieselbe ist alsdann $= Q - d$, da ferner auch A in B eben soviel würtet, §. 17., diese Würtung aber der Richtung der Bewegung von B nicht entgegen ist, sondern derselben vielmehr folgt, so gewinnt B an der Bewegungskraft, und solche wird nach dem Stöße $= q + d$ sein. Addiret man nun die Bewegungskräfte beider Körper nach dem Stöße zusammen, so sieht man, daß $Q - d + q + d = Q + q$ sei.

Z u s a z.

§. 124. Ist der Körper vor dem Stoß in Ruhe, so ist seine Kraft der Bewegung damals $= 0$, und wenn des Körpers A seine $= Q$ ist, so ist ihre Summe von dem Stöße $= Q + 0$, ferner ist wegen der gegenseitigen Würtung der Körper die Kraft der Bewegung von A nach dem Stöße $= Q - d$, und von B $= 0 + d$, und folglich ihre Summe $= Q - d + d$, d. i. die Summen der Kräfte der Bewegung sind vor und nach dem Stöße gleich, wenn ein nicht elastischer Körper an einen eben solchen ruhenden stößet.

Lehrsatz.

§. 125. Wenn zween Körper sich nach entgegengesetzter Richtung bewegen, und stoßen, so ist der Unterschied ihrer Bewegungskräfte vor dem Stöße gleich der Summe derselben nach dem Stöße.

Beweis: Wenn man die vorige Benennungen beibehält, und annimmt, daß $Q > q$ sei, so ist der Unterschied der Bewegungskräfte von A und B vor dem
Stoß

Stoß $= Q - q$. Weil nun beide Körper entgegengesetzte Bewegungen haben, so wird die grössere Bewegungskraft die kleinere gänzlich aufheben, und auch noch den Körper B nach der Richtung des ersten mit einer Kraft d mit fortführen; folglich wird wegen dem auch nach dem Stosse noch anhaltenden Widerstand des Körpers B gegen A die Kraft der Bewegung des letztern nach dem Stosse $= Q - q - d$ sein. Addirt man nun die in jedem Körper nach dem Stosse noch vorhandenen Kräften zusammen, so siehet man, daß $Q - q - d + d = Q - q$ sei. Auf eine ähnliche Art läßt sich das nehmliche erweisen, wenn man $Q < q$ annimmt.

Z u s a z.

§. 126. Haben zween nach entgegengesetzter Richtung sich stossende Körper A und B gleiche Massen, und Geschwindigkeiten, so sind auch die Bewegungskräfte Q und q vor dem Stosse einander gleich §. 28., folglich ist ihr Unterschied $= 0$; da nun gleich erwiesen worden, daß der Unterschied der Bewegungskräfte vor dem Stosse gleich der Summe derselben nach dem Stosse sei, so muß nothwendig nach dem Stosse in gegenwärtigen Falle keine Bewegungskraft mehr vorhanden sein, sondern beide Körper müssen in die Ruhe kommen.

Lehrsatz.

§. 127. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern ruhenden von eben der Art gerade anstößet, so verhält sich die Geschwindigkeit nach dem Stosse zu der Geschwindigkeit vor dem Stosse, wie die Masse oder das Gewicht des erstern zu der Summe der Massen oder der Gewichte von beiden.

Be-

Beweis: Es sei die Masse des Körpers $A = M$; seine Geschwindigkeit vor dem Stöße $= C$; also ist dessen Kraft der Bewegung $= MC$ §. 28., ferner sei die Masse von $B = m$, seine Geschwindigkeit und Kraft der Bewegung aber ist nach der Bedingung $= 0$; folglich ist die Summe der Bewegungsträften sowohl vor als nach dem Stöße $= MC$ §. 124. Weil nun B sich nach dem Stöße nicht langsamer als A bewegen kan, und auch nicht geschwinde, weil ihm A nicht mehrere Geschwindigkeit geben kan, als er selbst hat, so werden beide Körper nach dem Stöße mit gleicher Geschwindigkeit fortgeführt, und die Summe ihrer Massen ist $= M + m$; weil ferner die Kraft der Bewegung aus dem Produkt der Masse in die Ge-

schwindigkeit bestehet, §. 28., so ist $\frac{MC}{M + m} = c$ der Geschwindigkeit nach dem Stöße, und folglich ist auch $MC = Mc + mc$ und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, so ist $c : C = M : M + m$.

Z u s a z.

§. 128. Sind die Massen M und m beider Körper einander gleich, so ist die Geschwindigkeit nach dem

Stoß $c = \frac{MC}{2M}$, und folglich wiederum.

$$c : C = M : 2M.$$

daraus ersehet man, daß die Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoß nur halb so groß als die von A vor dem Stoß ware.

Lehrsatz.

§. 129. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern sich langsamer aber in eben der Richtung bewege-

gen

genden Körper gerade stösset, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse gleich der Summe der Bewegungskräfte dividirt durch die Summe ihrer Massen oder Gewichte.

Beweis: Wenn wir die vorhin gebrauchten Benennungen beibehalten, so ist die Summe der Bewegungskräfte beider Körper sowohl vor als nach dem Stoss $= MC + mc$ §. 123. und folglich ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= \frac{MC + mc}{M + m}$ §. 28.

Lehrsatz.

§. 130. Wenn zweien unelastische Körper von gleicher Masse mit verschiedener Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung gerade an einander stossen, so daß der geschwindere den langsamern nach dem Stosse mit sich fortführet, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse gleich dem halben Unterschied ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stosse.

Beweis: Wenn man die Masse eines jeden der beiden Körper A und B mit M, und ihre Geschwindigkeiten wie zuvor benennen, so ist die Kraft der Bewegung von A $= MC$, die von B $= Mc$, und also ihr Unterschied $= MC - Mc$; dieser aber ist gleich der Summe der Kraft der Bewegung nach dem Stosse §. 125. also ist die Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{MC - Mc}{2M}$, d. i. $\frac{C - c}{2}$; da aber der Unterschied der Geschwindigkeit vor dem Stosse $= C - c$ ist, so ist klar daß $\frac{C - c}{2}$ nur die Hälfte davon sei.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 131. Wäre, anstatt daß die Massen gleich angenommen werden $M : m = c : C$, so ist $MC = mc$, und $MC - mc = 0$, d. i. wenn die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten in verkehrter Verhältniß derselben stehen, so sind die Kräfte der Bewegung beider Körper vor dem Stöße gleich; und ihr Unterschied ist folglich $= 0$; nun aber ist der Unterschied gleich der Summe der Bewegungskräfte nach dem Stöße, §. 125. und also iene ebenfalls $= 0$; also wenn die Massen ungleich sind, und die Geschwindigkeiten stehen in verkehrter Verhältniß der Massen, so höret die Bewegung nach dem Stöße gänzlich auf.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 132. Nimt man an, daß die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten vor dem Stöße gleich sind, so ist die Kraft der Bewegung des ersten Körpers vor dem Stöße $= MC$, die des andern $= mC$, und ihr Unterschied $= MC - mC$; weil nun dieser der Summe der Bewegung nach dem Stöße gleich ist §. 125., so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stöße $= \frac{MC - mC}{M + m}$ §. 129.

und folglich $\frac{MC - mC}{M + m} : C = M - m : M + m$,

d. i. die Geschwindigkeit nach dem Stöße verhält sich zur Geschwindigkeit vor dem Stöße, wie der Unterschied der Massen zu ihrer Summe.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 133. Sind die Massen sowohl als die Geschwindigkeiten auf was immer für Art ungleich, so ist die Kraft

Kraft der Bewegung vor dem Stosse des ersten $= MC$
und des andern $= mc$, und ihr Unterschied $= MC$
 $- mc$. Dieser aber ist gleich der Summe der Be-
wegungskraft nach dem Stosse, §. 125. also ist die
Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{MC - mc}{M + m}$ d. i.

gleich dem Unterschied der Kraft der Bewegung vor
dem Stosse dividirt durch die Summe der Massen.

Aufgabe.

§. 134. Wie die Bewegungskraft zu finden, die
ein Körper bei dem anstossen an einen andern verloren
hat?

Auflösung: 1. Multipliciret die Masse des Kör-
pers durch die gehabte Geschwindigkeit vor dem Stosse,
um die Kraft der Bewegung vor dem Stosse zu er-
halten.

2. Multiplicirt auch die Masse desselben durch die
ihn nach dem Stosse übrig gebliebene Geschwindigkeit,
so bekommt ihr die Kraft der Bewegung nach dem Stosse.

3. Ziehet die letztere von der erstern ab, so zeigt
der Unterschied was von der Bewegungskraft durch dem
Stosse verloren gegangen.

Wie die nach dem Stosse übrig bleibende Ge-
schwindigkeiten zu finden, erhellet aus §. 127.
und folgenden §§.

Grundsatz.

§. 135. Wenn ein unelastischer Körper an einen
andern, der nicht weichen kan stösset, so höret seine
ganze Bewegung auf.

Erklärung.

Fig. 32. §. 136. Wenn ein Körper A schief gegen eine Fläche DE in einen Punkt B stößet, und wieder davon gegen C abprellet, so wird der Winkel ABD, den die Richtungslinie AB mit DB machet, der Einfallwinkel (Angulus incidentiæ) genent; der Winkel CBE aber den die Richtungslinie BC beim abprellen mit BE machet, heisset der Abprellwinkel (Angulus reflexionis).

Lehrsatz.

§. 137. Wenn ein Körper A gegen einen andern DE, der nicht weichen kan, senkrecht, d. i. nach der Richtung AD anstößet, und einer oder alle beide sind elastisch, so wird A mit der nehmlichen Geschwindigkeit und Richtung von D wieder gegen A zurück getrieben, mit welcher er angestossen hat.

Beweis: Wenn beide Körper nicht elastisch wären, so würde die ganze Kraft des Körpers A nach dem Stöße vernichtet sein, und seine Bewegung gänzlich aufhören, §. 135. also wendet derselbe seine ganze Kraft an; den elastischen Körper zusammen zu drücken; so bald aber die Kraft des Körpers A in der Zusammendrückung sich erschöpft hat, so suchet der elastische Körper sich mit eben der Kraft, als er zusammen gedrückt worden, wieder in seinen vorigen Zustand zu setzen §. 7. N. 5.; also muß der Körper A mit eben der Geschwindigkeit, mit welcher er angestossen hat, wieder zurückgetrieben werden, und weil sich der elastische Körper wieder nach eben der Richtung herstellt, als er gedrückt worden, so muß auch der Körper A nach eben der Richtung wieder zurückgetrieben werden, nach welcher er angestossen hat.

Zur

Z u s a z.

§. 138. Sind beide Körper elastisch, so werden sie bei ihrem Stosse auch beide gegenseitig zusammen gedrückt, und suchen sich nach demselben mit der nehmlichen Kraft wieder herzustellen. Weil nun der Körper DE nicht weichen kan, so wird der Körper A mit der vorigen Geschwindigkeit und Richtung von D nach A wieder zurückgetrieben.

Lehrsatz.

§. 139. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern DE, der nicht weichen kan, schief stösset, so springt er nach dem Stosse dergestalt zurück, daß der Einfallswinkel dem Abprellwinkel gleich ist. Fig. 32.

Beweis: Wenn man die Kraft, mit welcher der Körper A gegen B anstösset, durch die Linie AB ausdrückt, so kan man sie auch als aus zweien Kräften AH und AD zusammengesetzt ansehen §. 36.; Weil nun die Kraft AH zu DE parallel ist, so verlieret sie durch den Stosse nichts, sondern ist nach demselben noch ganz vorhanden, und weil die Kraft AD senkrecht gegen DE wirkt, so erschöpft sie sich durch den Stosse gänzlich; weil aber der elastische Körper A durch den Stoß zusammengedrückt wird, und sich nach demselben wieder in seine vorige Figur herzustellen sucht, §. 7. Nr. 5. so mus er von DE mit der vorigen Kraft als er angestossen hat, zurück springen, und man kan die nach dem Stosse vorhandene Kraft durch die zwei Kräfte $BE = AH$ und $BH = AD$ vorstellen. Weil aber der Körper keiner von beiden Richtungen BE und BH sondern der Diagonal BC folget, §. 32. so wird er nach dem Stosse eigentlich in der Richtung BC abprellen.

len. Da nun $ADBH$ und $BHCE$ gleich und ähnliche Parallelogrammen sind, und jedes durch seine Diagonale in zwei solche Dreiecke zertheilt wird, so sind auch ihre gleichnamigte Winkel gleich, und folglich ist $ABD = CBE$, d. i. der Einfallwinkel ist gleich dem Abprallwinkel.

Aufgabe.

§. 140. Wie der Punkt B zu finden, in welchen ein schief anstossender elastischer Körper A im zurückprellen durch den ausser dem Körper DE gegebenen Punkt I gehen mus.

Auflösung: 1. Messet die perpendicularer Abstände AD und IF , und auch ihre Entfernung von einander DF .

2. Theilet DF dergestalt in zweien Theile, daß $BF : BD = IF : AD$ sei, so ist B der verlangte Punkt.

Beweis: Weil die Seiten der Dreiecke BIF und BAD in Proportion stehen, so sind sie einander ähnlich. §. 139. und ihre gleichnamigte Winkel sind einander gleich, derowegen ist der Winkel $ABD = IBF$, das aber ist der Einfallwinkel und Abprallwinkel, also wenn der Körper A schief in B stösset, so wird er im zurückprellen durch I gehen.

Z u s a z.

§. 141. Verlangte man den Einfallwinkel ABD zu finden, so sethet DB als den Sinus totus AD aber als den Sinus des Winkels ABD an, und löset das Dreieck ABD nach §. 432. Geomet. auf.

Lehrsatz.

§. 142. Die Kraft eines senkrechten Stosses gegen einen Körper verhält sich zu der eines schiefen wie der Sinus totus zum Sinus des Einsalwinkels des letztern.

Beweis: Wenn man die Kraft des Stosses überhaupt durch AB , und die des schiefen, welcher nach der Richtung AB geschieht, aus zweien Kräften AH und AD zusammengesetzt ausdrückt, so würdet die Kraft AD bei dem schiefen Stoß nur allein in den Körper DE , weil die andere parallel zu DE ist. Siehet man nun in dem Dreiecke ABD die Seite AB als den Sinus totus, AD aber als den Sinus des Einsalwinkels ABD an, so ist klar, daß sich die Kraft des senkrechten Stosses zu der Kraft eines schiefen wie der Sinus totus zum Sinus des Einsalwinkels verhalte.

Lehrsatz.

§. 143. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern ihm gleichen aber ruhenden B gerade stößet, so wird A nach dem Stosse ruhen, B aber mit der Geschwindigkeit A bewegt werden.

Beweis: Wenn beide Körper nicht elastisch wären, so würden sie sich nach dem Stosse in voriger Richtung mit der halben Geschwindigkeit des Körpers A bewegen §. 128., nun aber würdet die Schnellkraft von B nach dem Stosse gegen A mit einer Geschwindigkeit die der Zusammenbrückung gleich ist, und hinwieder A gegen B auf die nehmliche Art. Weil aber die Wirkung der Schnellkraft von B der Richtung der Bewegung von A gerade entgegen ist, so mus die Bewegung von A nach dem Stosse ganz aufhören, und weil die Wirkung der Schnellkraft von A der Richtung von B nicht entgegen ist, sondern nach der Richtung von A

geschiehet, so mus sich B nach dem Stöße mit der Geschwindigkeit von A und in derselben Richtung bewegen.

Z u s a z.

Fig. 33. §. 144. Wenn also mehreren gleichen und sich berührenden elastischen Körpern BCDE durch einen andern A ein Stoß beigebracht wird, so werden sie alle bis auf den letzten in Ruhe bleiben, dieser aber wird sich allein mit der Geschwindigkeit von A gegen F bewegen; weil erstlich A seine ganze Kraft an B, dieser an C, u. s. w. giebt, die Schnellkraft dieser Körper aber in die sie stossenden zurückwürfet, und sie in Ruhe bringt. §. 143. Da aber in den letzten weiter nichts zurückwürfet, so sezet er seine Bewegung mit der erhaltenen Geschwindigkeit fort.

Lehrsatz.

§. 145. Wenn zween elastische Körper von gleicher Masse und Geschwindigkeit sich in gerader entgegengesetzter Richtung stossen, so werden sie beide nach dem Stöße mit ihrer vorigen Geschwindigkeit und Richtung zurückspringen.

Beweis: Wären beide Körper nicht elastisch, so würden sie nach dem Stöße ihre ganze Bewegung verlieren, und in Ruhe kömmen §. 126. weil aber beide elastisch sind, so werden ihre Kräfte in die gegenseitige Zusammendrückung verwendet. Nun aber ist bei elastischen Körpern die Herstellung so stark als die Zusammendrückung §. 7. Nr. 5. also wird ein Körper den andern nach dem Stöße mit eben der Geschwindigkeit und Richtung zurücktreiben, als er gekommen ist.

Lehrs

Lehrsatz.

§. 146. Wenn zween elastische Körper von gleicher Masse und mit ungleicher Geschwindigkeit sich in entgegengesetzter Richtung stossen, so werden sie nach dem Stosse mit verwechselten Geschwindigkeiten zurückgetrieben.

Beweis: Wenn die zween Körper A und B gleiche Geschwindigkeiten hätten, so würden sie sich auch nach dem Stosse wieder gleiche Geschwindigkeiten mittheilen, und sich von einander entfernen §. 145. da wir aber annehmen, daß die Geschwindigkeit von $A = C + d$, und die von $B = C$ sei, und die Schnellkraft durch ihre Zurückwürfung dem einen Körper des andern Geschwindigkeit gegenseitig mittheilet, so wird nach dem Stosse die Geschwindigkeit von $A = C$, und die von $B = C + d$ sein, und weil die Schnellkraft beider Körper den vorigen Richtungen gerade entgegen würlet, so müssen sie sich nach eben denselben wieder von einander entfernen.

Zusatz.

§. 147. Die Summe der Geschwindigkeiten der beiden Körper vor dem Stosse ist also nach dem Stosse noch die nehmliche, und nur verwechselt, d. i. $C + d = C + d$.

Lehrsatz.

§. 148. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern B der sich nach eben der Richtung aber langsamer bewegt, und von gleicher Masse ist, anstosset, so werden sie beide nach dem Stosse ihre Geschwindigkeiten verwechseln aber sich in der vorigen Richtung weiter fort bewegen.

Beweis: Wenn wir die vorige Benennungen beibehalten, und erstlich nur die gleiche Geschwindigkeiten C und C betrachten, so sehen wir, daß mit denselben kein Stoß erfolgen, und also auch die Körper sich dieselbe nicht mittheilen könnten; weil aber die Geschwindigkeit von $A = C + d$ ist, so ist es beim Anstossen an B eben soviel, als ob A nur mit der Geschwindigkeit d allein an B stösse, und als ob B in Ruhe wäre, daher theilet ihm derselbe auch nur eine Geschwindigkeit d mit, behält aber die Geschwindigkeit C selbst, und B bekommt also nach dem Stosse die Geschwindigkeit $C + d$, und beide bewegen sich nach der vorigen Richtung.

Z u s a z.

§. 149. Da also die Geschwindigkeiten vor dem Stosse nur um ihren Unterschied nach dem Stosse verwechselt worden, so werden sich die zween Körper nach dem Stosse mit eben der Geschwindigkeit von einander zu entfernen suchen, mit welcher sie sich vor dem Stosse genähert haben.

L e h r s a z.

§. 150. Wenn ein unelastischer Körper A an einen sich nach eben der Richtung aber langsamer bewegenden B stösset, so ist die Kraft der Bewegung nach dem Stosse eben so gros, als sie gewesen wäre, wenn A mit dem Unterschied der Geschwindigkeit der beiden Körper vor dem Stosse an B ruhend gestossen hätte.

Beweis: Um dieses zu erweisen, ist nur darzu thun, daß in beiden Fällen nach dem Stosse eine gleiche Kraft der Bewegung verloren gehe. Wenn man also nach dem ersten Falle annimmt, daß B in Bewegung sei, und die Masse von $A = M$, seine Geschwindigkeit $= C$; die Masse von $B = m$, und c dessen Geschwindigkeit sei,

sei, so wird die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{MC + mc}{M + m}$ §. 129. und also die Kraft der Bewegung von beiden sich nach dem Stosse mit einander bewegendem Körpern $= \frac{M^2C + Mmc}{M + m}$ sein, weil nun die Kraft der Bewegung von A vor dem Stosse $= MC$ ware, so ist klar, daß die Kraft der Bewegung, so A durch dem Stoß verliert, $= MC$

$$- \frac{M^2C + Mmc}{M + m} = \frac{M^2C + MmC - M^2C - Mmc}{M + m}$$

$$= \frac{MmC - Mmc}{M + m}.$$

Wird nun in andern Falle angenommen, daß B in Ruhe sei, und durch A mit einer Geschwindigkeit $C - c$ gestossen werde, so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{MC - Mc}{M + m}$ §. 129. und folglich die Kraft der Bewegung von A nach dem Stosse $= \frac{M^2C - M^2c}{M + m}$; weil nun seine Kraft der Bewegung vor dem Stosse $= MC - Mc$ ware, so muß die nach dem Stosse verloren gegangene Kraft der Bewegung $= \frac{M^2C - M^2c + MmC - Mmc - M^2C + M^2c}{M + m}$

$$= \frac{MmC - Mmc}{M + m} \text{ sein.}$$

Diese Grösse aber ist der im ersten Falle verloren gegangenen Kraft der Bewegung gleich, also ist auch der Stoß in beiden Fällen gleich.

Z u s a z.

§. 151. Wenn also beide Körper elastisch sind, so ist die Zurückwürfung gegeneinander ihrem Stosse gleich §. 7. Nr. 5. also wenn sich A geschwinder aber in der nehmlichen Richtung wie B bewegt, so ist die Würfung der Schnellkraft bei dem Stosse beider Körper so gros, als der Unterschied der Geschwindigkeiten vor dem Stos war.

L e h r s a z.

§. 152. Wenn zween unelastische Körper in entgegengesetzter Richtung gerade an einander stossen, so ist ihr Stos eben so gros, als wenn A mit einer Geschwindigkeit, die der Summe der Geschwindigkeiten der beiden Körper vor dem Stosse gleich ist, an B ruhend anstossete.

Beweis: Um dieses zu erweisen, muß abermal dargethan werden, daß in beiden Fällen gleiche Kräfte der Bewegung verloren gehen. Wenn wir also die vorige Benennung beibehalten, so ist im ersten Falle die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse = $\frac{MC - mc}{M + m}$ §. 129. und also die Kraft der Bewegung

von A nach dem Stosse = $\frac{M'C - Mmc}{M + m}$; nun aber

ist die Kraft der Bewegung von A vor dem Stosse = MC , folglich ist die im ersten Falle bei dem Stosse ver-

loren gegangene = $\frac{M'C + MmC - M'C + Mmc}{M + m}$

= $\frac{MmC + Mmc}{M + m}$.

Nimt

Nimmt man nun in andern Falle an, daß B in Ruhe, und die Geschwindigkeit von A vor dem Stosse $= C + c$ sei, so wird die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

nach dem Stosse $= \frac{MC + Mc}{M + m}$ sein, §. 129. folglich

ist die Bewegungskraft von A nach dem Stoß $= \frac{M^2C + M^2c}{M + m}$.

Nun aber ist die Kraft der Bewegung von A vor dem Stosse $= MC + Mc$, also wird die durch dem Stosse im zweiten Falle verloren gegangene Kraft der Bewegung

$= \frac{M^2C + MmC + M^2c + Mmc - M^2C - M^2c}{M + m}$

$= \frac{MmC + Mmc}{M + m}$ sein; diese Grösse aber ist der im

ersten Falle für die verloren gegangene Kraft der Bewegung gefundenen gleich, also ist auch der Stoß in beiden Fällen gleich.

Z u s a z.

§. 153. Sind beide Körper elastisch, so ist die Zurückwirkung der Schnellkraft dem Stosse selbst gleich §. 7. Nr. 5. wenn sich also beide Körper in entgegengesetzter Richtung stossen, so würdet ihre Schnellkraft mit einer Geschwindigkeit, die der Summe ihrer vor dem Stosse gehabt Geschwindigkeiten gleich ist.

A u f g a b e.

§. 154. Wenn zween vollkommen elastische Körper sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach einerlei Richtung bewegen, und stossen, deren Massen und Geschwindigkeiten vor dem Stosse bekannt sind, wie eines jeden Geschwindigkeit nach dem Stosse zu finden?

Auf-

Auflösung: Wenn wir die vorigen Benennungen beibehalten, und anfänglich annehmen, daß beide Körper nicht elastisch wären, so würden sie sich nach dem Stöße miteinander fort bewegen, und ihre gemeinschaft-

liche Geschwindigkeit würde alsdenn
$$= \frac{MC + mc}{M + m}$$

sein §. 129. Weil sie aber elastisch sind, so würdet die Schnellkraft in dieselbe mit einer Geschwindigkeit wie $C - c$ §. 146., und sie zerteilet solche in dem Augenblick des Stoses, wo beide Körper gleichsam nur einen ausmachen, dergestalt, daß die von der Schnellkraft herrührenden Geschwindigkeiten mit den Massen in verkehrter Verhältnis stehen, d. i. Wenn man die Geschwindigkeit, die B bekommt, $= x$ setzt,

so ist $M : m = x : C - c - x$

folglich $MC - Mc - Mx = mx$

und $MC - Mc = Mx + mx$

also
$$\frac{MC - Mc}{M + m} = x$$

daher ist die Geschwindigkeit, welche A bekommt

$$= C - c - \frac{MC + Mc}{M + m}$$

$$= \frac{MC - Mc + mC - mc - MC + Mc}{M + m}$$

$$= \frac{mC - mc}{M + m}$$

Weil aber die Schnellkraft gegen die Richtung von A würdet, und diesen Körper zurückzutreiben sucht, so mus die durch die Schnellkraft überkommene Geschwindigkeit x von der durch den puren Stoß entstandenen abgezogen werden, um endlich die eigentliche Geschwindigkeit von A nach dem Stöße

$$= MC$$

$$= \frac{MC + mc - mC + mc}{M + m} = \frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$$

zu erhalten. Weil ferner die Schnellkraft der Richtung von B nicht entgegen, sondern nach derselben wir-
ket, so muss die von der Schnellkraft herrührende Ge-
schwindigkeit x zu der durch den Stoß allein entstande-
nen addiret werden, um die Geschwindigkeit von B

$$\text{nach dem Stosse} = \frac{MC + mc + MC - mC}{M + m} \bullet$$

$$= \frac{2MC + mc - mC}{M + m} \text{ zu erhalten.}$$

Z u s a z.

§. 155. Weil die Geschwindigkeit von A eigent-
lich negativ wird, so ist es ein Zeichen, daß die durch
die Schnellkraft nach dem Stosse zurück empfangene Ge-
schwindigkeit grösser als die vom Stoß selbst sei, daher
muss A nach dem Stosse nothwendig seine Richtung än-
dern, und wieder den Weg zurück nehmen, den er ge-
kommen ist. Wäre aber die Geschwindigkeit x der
Schnellkraft kleiner als die Geschwindigkeit welche A
durch den Stoß allein besizet, so würde sich dieser
Körper nach dem Stosse nur mit dem Unterschied dieser
beiden Geschwindigkeiten nach seiner vorigen Richtung
fort bewegen, übrigens verstehet sich von selbst, daß
wenn beide Geschwindigkeiten gleich sind, er nach dem
Stosse ganz in die Ruhe kommen müsse.

Aufgabe.

§. 156. Wenn zween elastische Körper sich mit ver-
schiedenem Geschwindigkeiten nach entgegengesetzter Rich-
tung bewegen, und stossen, und ihre Massen und Ge-
schwindigkeiten vor dem Stosse sind gegeben; wie eines
jeden Geschwindigkeit nach dem Stosse zu finden?

Auf-

Auflösung: Wenn wir die vorigen Benennungen beibehalten, und abermal annehmen, als ob beide Körper nicht elastisch wären, so wird ihre durch den Stoß

allein erhaltene Geschwindigkeit $= \frac{MC - mc}{M + m}$ sein §.

133. da sie aber beide elastisch sind, und die Schnelkraft in dieselbe mit einer Geschwindigkeit wie $C + c$ würket, §. 153. und solche in dem Augenblick des Stoßes dergestalt zerteilet, daß die von der Schnelkraft mitgetheilten Geschwindigkeiten mit den Massen in verkehrter Verhältnis stehen. D. i. wenn wir die Geschwindigkeit, welche der Körper B bekommt, wieder $= x$ annehmen, daß:

$$M : m = x : C + c - x$$

$$\text{folglich } MC + Mc - Mx = mx$$

$$\text{und } MC + Mc = Mx + mx$$

$$\text{also } \frac{MC + Mc}{M + m} = x \text{ sei.}$$

Daher ist die Geschwindigkeit, welche A bekommt

$$= C + c - \frac{MC - Mc}{M + m}$$

$$= \frac{MC + Mc + mC + mc - MC - Mc}{M + m}$$

$$= \frac{mC + mc}{M + m}.$$

Daher entsteht demnach wie zuvor die eigentliche Geschwindigkeit von A nach dem Stöße

$$= \frac{MC - mc - mC - mc}{M + m} = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$$

$$\text{und die Geschwindigkeit von B} = \frac{MC - mc + MC + Mc}{M + m}$$

$$= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}.$$

Wenn

Wenn $mC + 2mc$ grösser als MC ausfallet, so ist es ein Zeichen, daß die durch die Schnellkraft empfangene Geschwindigkeit grösser als die eigene von A sei, und der Körper A wird in solchen Falle wieder zurück gehen; ist $mC + 2mc = MC$, so wird A nach dem Stosse ruhen, wenn aber $mC + 2mc$ kleiner als MC wäre, so würde sich A nach dem Stosse in voriger Richtung noch weiter fort bewegen.

Lehrsatz.

§. 157. Wenn ein elastischer Körper A gerade an einen andern ruhenden B anstösset, und beide sind von verschiedener Masse, so verhält sich 1. die Geschwindigkeit von A nach dem Stosse zur gehabtten Geschwindigkeit vor dem Stosse, wie der Unterschied der Massen von A und B zu ihrer Summe, und 2. die nach dem Stosse dem Körper B mitgeteilte Geschwindigkeit ist zur Geschwindigkeit, welche A vor dem Stosse hatte, wie die doppelte Masse von A zur Summe der Massen beider Körper.

Beweis: Wenn M die Masse von A, m die Masse von B, V die Geschwindigkeit von A vor dem Stosse, C die Geschwindigkeit desselben nach dem Stosse, v die Geschwindigkeit von B vor dem Stosse, welche hier $= 0$ ist, und c seine Geschwindigkeit nach dem Stosse ist, so betrachtet, 1. daß, wenn B eine Bewegung hätte, die Geschwindigkeit von A nach dem Stosse

$$= \frac{MV - mV + 2mv}{M + m} \text{ wäre, §. 154. weil aber B}$$

ruhet, so ist ihre Geschwindigkeit vor dem Stosse $= 0$ und eben daher auch $2mv = 0$, folglich ist die Ge-

$$\text{schwindigkeit nach dem Stosse} = C = \frac{MV - mV}{M + m},$$

und folglich ist $C : V = M - m : M + m$.

2. Wenn man annimmt, daß B nicht ruhe, so ist seine Geschwindigkeit nach dem Stosse $= c = \frac{2MV + mv - Mv}{M + m}$ §. 154. weil aber B in Ruhe

und also $v = 0$ ist, so ist $\frac{2MV}{M + m} = c$ der Geschwindigkeit von B nach dem Stosse und also

$$c : V = 2M : M + m.$$

Ubrigens. Da die Schnelkraft, Härte, und Weiche der Körper als die Eigenschaften, welche bei dem Stosse den meisten Einfluß haben, niemals in vollkommensten Grade sondern immer vermischt angetroffen werden, die meisten von dem Stosse der Körper angeführten Gründe aber solche in der größten Vollkommenheit voraussetzen, so erinnere ich die Anfänger sich nicht zu verwundern, wenn sie bei angestellten Versuchen, oder in der Ausübung die oben gegebenen Regeln oft nicht gänzlich mit der erfolgten Wirkung übereinstimmen sehen. Es gehet hier so wie mit den meisten physikalischen Unternehmungen, wo die mathematische Gewisheit wegen der zu großen Verschiedenheit, die in der Natur angetroffen wird, nicht mehr staat finden kan. Ich sollte zwar hier von dem Stosse der Stuckkugeln und Bomben gegen die Objecten wieder welche sie geschossen und geworfen werden ein und anderes anführen; allein die große Verschiedenheit der Körper, die Schwierigkeit ihre Eigenschaften, so den Stosse ändern können, auf die Probe zu nehmen, oder die Grade ihre Härte, Weiche oder Elasticität zu entdecken, kurz die fast unüberwindlichen Hindernisse etwas verlässliches herauszubringen halten mich ab den Anfängern Sachen vorzulegen, die in der Ausübung so gar wenig anwendbar sind.

Erst-



Sechstes Hauptstück.

Von dem Schwerpunkt.

Erklärung.

§. 158. Der Mittelpunkt der Schwere eines Körpers (Centrum Gravitatis) ist ein gewisser Punkt; um welchen die Masse eines Körpers dergestalt ausgeteilt ist, daß, wenn man denselben mit einer geraden Fläche durch diesen Punkt nach was immer für einer Richtung durchschneidet, beide Teile allemal gleiche *Leichtigkeit* *Leichtigkeit* Schwere bekommen. Oder wenn der Körper senkrecht unter diesem Punkt unterstüzt, oder oben an demselben aufgehängt wird, so neiget er sich weder mehr auf die eine als andere Seiten; sondern bleibt in der Ruhe.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 159. Obwohl eine mathematische Linie oder Fläche nichts körperliches an sich, und folglich keine Schwere hat, so kan man sie doch im Gedanken als Körper ansehen, und ihnen eine Schwere zueignen, wenn man sich an ihnen wie an den Körpern drei Dimensionen einbildet, wovon aber an der Linie zwei nemlich die Dicke und Breite, und an der Fläche eine nemlich die Dicke als unendlich klein betrachtet werden müssen. In diesem Verstande läßt sich auch an Linien und Flächen ein Punkt denken, der die Eigenschaften des Schwerpunkts der wirklichen Körper hat, und der daher auch der Schwerpunkt einer Linie oder Fläche genent wird.

Wiltführlicher Satz.

§. 160. Man pflegt überhaupt anzunehmen, als ob die ganze Schwere eines Körpers in dessen Mittelpunkt der Schwere allein versammelt wäre, und alle übrige Teile keine Schwere hätten.

Erklärung.

§. 161. Der Durchmesser der Schwere eines Körpers (Diameter Gravitatis) ist eine gerade Linie, welche nach was immer für einer Richtung durch den Mittelpunkt der Schwere desselben gezogen ist.

Z u s a z.

§. 162. Wenn also zween oder mehrere solche Durchmesser in einem Körper gezogen werden, so durchschneiden sie sich alle in dessen Schwerpunkte.

Erklärung.

§. 163. Wenn eine gerade Fläche einen Körper durch den Schwerpunkt, oder nach einen Durchmesser der Schwere durchschneidet, so heisset sie eine Fläche der Schwere (Planum Gravitatis).

Z u s a z.

§. 164. Zwei solche Flächen durchschneiden sich also in einem Durchmesser der Schwere.

Erklärung.

§. 165. Körper, welche in allen ihren Teilen und unter gleichen Ausdehnungen gleiche eigenthümliche Schwere (Gravitas specifica) haben, werden Körper von gleichartiger Schwere genent, so wie diejenige von ungleichartiger Schwere sind, welche unter
glei-

gleichen Ausdehnungen ungleiche eigenthümliche Schwere enthalten.

§. B. Ein Prisma, ganz gleichdicht von Eisen ist ein Körper von gleichartiger Schwere, und an einen, welches halb von Holz und halb von Eisen zusammengesetzt wäre, ist die eigenthümliche Schwere ungleichartig; weil ein Körper von Holz, und einer von Eisen unter gleichen Ausdehnungen nicht gleiche Schwere haben.

Erklärung.

§. 166. Das Bemühen der Schwere (Gravitation, Pondus, vel Momentum Gravitatis) ist iene Kraft, mit welcher sich die schwere Körper zu bewegen anfangen, und in alle ihnen entgegenstehende wirken; sie ist also gleich dem Produkt aus der anfänglichen Geschwindigkeit in die Masse des Körpers.

Z u s a z.

§. 167. Da die anfängliche Geschwindigkeit der Schwere in allen Körpern gleich ist, §. 6., so steht ihr Bemühen oder die Gravitation mit den Massen, wenn sie von gleichartiger Schwere sind, in gerader Verhältnis, und folglich kan man die Masse der Körper, wenn sie von gleichartiger Schwere, für ihr Gewicht, und dieses für iene nehmen.

Z u s a z.

§. 168. Wie die Figur eines Körpers immer verändert wird, wenn er nur die nehmliche Art und Menge der Masse behält, so behält er auch sein voriges Bemühen der Schwere, oder sein Gewicht bei.

Erklärung.

§. 169. Der Mittelpunkt der Größe, oder der Figur (*Centrum Magnitudinis vel figuræ*) hat in einem Körper, einer Fläche oder Linie eine solche Stellung oder Lage, daß, wenn man dieselbe mit einer geraden Fläche durch ihn nach was immer für einer Richtung durchschneidet, beide Teile allemal gleichen Inhalt bekommen.

Z u s a z.

§. 170. Der Mittelpunkt der Größe oder Figur ist also an einer geraden Linie in ihrer Mitte; der eines Quadrats oder Rectangels in dem Durchschnitte ihrer Diagonalen; der eines regelmäßigen ^{viereckigen} Polygons oder einer Zirkelfläche oder einer ^{Kugelfläche} Kugel dessen Mittelpunkt selbst; der eines ^{Kreiszylinders} Kubus, Prismas oder Cylinders in der Mitte ihrer Achse.

Erklärung.

Fig. 34.

§. 171. Wenn man sich einbildet, daß die Schwerpunkten zweener Körper A und B durch eine unbiegsame gerade Linie AB, die ohne Schwere ist, verbunden sind, und dieselbe in einem Punkte C dergestalt entweder unterstühet, oder aufgehangen wird, daß sie sich um denselben frei bewegen kan, so wird diese Linie ein mathematischer Hebel (*Vectis mathematica*) der Punkt C der Ruhepunkt (*Hypomochlium*) oder auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt von beiden Körpern genent.

Hat die Linie, welche die zween Körper verbindet, eine Schwere, d. i. ist sie wirklich ein Körper z. B. eine Eisenstange, die nur eine Linie vorstellet, so wird sie ein physikalischer Hebel genent.

Er

Erklärung.

§. 172. Man pflegt zu sagen, daß zween Körper A und B im Gleichgewicht stehen, wenn ihre Schwerpunkten durch eine gerade Linie, die in einem Punkt C aufgehangen oder unterstützt ist, verbunden werden, und alsdenn keine Bewegung erfolgt, oder beide Körper ein gleiches Bemühen der Schwere ausüben.

Zusatz.

§. 173. Weil die Wirkung der Schwere allezeit senkrecht gegen den Mittelpunkt der Erde geht, so ist es eben nicht allezeit nöthig, daß der Hebel, welcher die zween Körper verbindet, eine gerade Linie sei, oder daß er durch die Schwerpunkten derselben gehe. Er kan auch auf was immer für Art wie z. B. CF gekrümmt sein, oder die Körper können an Fäden daran aufgehangen werden, genug wenn DF und GE zu AB parallel, und $DF = CB$, und $GE = AC$ angenommen werden.

Lehrsatz.

§. 174. Wenn zween Körper von gleicher Masse oder Schwere an einen Hebel gleich weit von seinen Ruhepunkt aufgehangen werden, so stehen sie im Gleichgewicht.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn der in A befindliche Körper den in B bewegen sol, sie beide in der nehmlichen Zeit die gleiche Bögen AD und BE beschreiben müssen; weil die Radien CA und CB gleich angenommen worden, folglich hätten die Körper gleiche Geschwindigkeit; da sie nun auch von gleicher Masse sind, so haben sie ein gleiches Bemühen der Schwere, §. 166., und also kan keiner den andern in Bewegung setzen, sondern sie sind im Gleichgewicht, §. 172.

Fig. 35.

Lehrsatz.

§. 175. In einigen Körpern und Flächen, die von gleichartiger Materie sind, ist der Mittelpunkt der Grösse einerlei mit dem Mittelpunkt der Schwere.

Beweis: Der Mittelpunkt der Grösse hat in einigen Körpern und Flächen eine solche Lage, daß, wie man immer durch denselben einen geraden Durchschnitt machet, dieselbe allemale in zween Teile geteilet werden, die einander an Inhalt gleichen, §. 169. ferner, was man sich immer in denselben für gleichweit von dem Mittelpunkt der Grösse abstehende und mit einer geraden durch denselben gehenden Linie zusammengezogene Punkten, den man eine Schwere zueignet, einbildet, so stehen solche im Gleichgewicht §. 174. diese Punkten aber alle zusammengenommenen machen den Inhalt des Körpers oder die Fläche selbst, und ihre Schwere zusammen die ganze Schwere aus, und der Mittelpunkt der Grösse ist zugleich der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller in beiden Teilen angenommenen Punkten, also ist der Mittelpunkt der Grösse, und Schwere in einigen Körpern und Flächen von gleichartiger Materie einerlei.

Z u s a z.

§. 176. Wenn man sich also einbildet, daß eine gerade Linie in zween gleiche Teile geteilet sei, und daß alle Punkten derselben eine Schwere hätten, so ist aus obigen Lehrsatz klar, daß der Mittelpunkt der Grösse und Schwere an einer geraden Linie einerlei sei.

Die Mittelpunkte der Grösse und Schwere sind hauptsächlich in nachstehenden Flächen und Körpern einerlei, als: In der Zirkelfläche, in allen
regel.

^{als flächenförmig}
regelmäßigen Polygonen, in dem Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboides. Dann in der Kugel, in Körpern so durch regelmäßige und einerlei Vielecke eingeschlossen sind, in Cylindern und ~~Pentagonalen~~ Prismen; sind aber diese Flächen aus ungleichartigen Materien zusammengesetzt, so sind auch diese Mittelpunkte in ihnen verschieden; wie aber in den erstern die Mittelpunkte zu finden, ist aus der Geometrie bekant.

Aufgabe.

§. 177. Wie der Mittelpunkt der Schwere in einem Dreieck zu finden?

Auflösung: Theilet zwei beliebige Seiten AE und EB jede in zween gleiche Teile, und ziehet die Linien AF und BD, so ist ihr Durchschnittspunkt C der Schwerpunct des Dreiecks ABE.

Beweis: Betrachtet, daß man das Dreieck aus Elementen wie FI, die parallel zu AE sind, bestehend ansehen könne, und daß also dieselbe insgesamt durch die Linie DB in zween gleiche Teile geteilet werden; folglich gehet DB durch den Schwerpunct des Dreiecks; nicht minder aber werden die parallele Elemente zu BE durch AF in zween gleiche Teile geteilet, folglich gehet auch AF durch den Schwerpunct, und AF und BD sind Durchmesser der Schwere §. 161. die sich in den Schwerpuncte C durchschneiden §. 162.

Z u s a z.

§. 178. Da FG parallel zu AE ist, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke EDB und FGB die Linie $FG = \frac{ED}{2}$, und folglich auch $= \frac{AD}{2}$; nicht min-

der wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und FGC ist

$$AD : FG = AC : CF$$

nun aber ist $AD = 2FG$,

also ist auch $AC = 2CF$

$$\text{das ist } AC = 2 \frac{AF}{3}$$

b. i. Man findet den Schwerpunkt eines Dreiecks, wenn man aus einem Winkel A auf die Mitte der entgegenstehenden Seiten EB eine Linie AF zieht, und auf derselben einen Punkt C annimmt, der $\frac{2}{3}$ AF von A entfernt ist.

Lehrsatz.

§. 179. Wenn zween Körper von gleicher Schwere an einen Hebel in ungleicher Weite von dem Ruhepunkt angebracht werden, und der Hebel selbst ohne Schwere betrachtet wird, so sind die Bemühungen ihrer Schwere ungleich, und dieselbe verhalten sich wie ihre Abstände von dem Ruhepunkt.

Fig. 37. Beweis: Es sei der Abstand AO des in A an der Hebel gehangenen Körpers $= 2$, die Bemühung seiner Schwere $= q$; OB der Abstand des in B angebrachten Körpers $= 3$, und die Bemühung seiner Schwere $= Q$, die Schwere selbst aber an beiden Körpern gleich; so ist zu erweisen, daß:

$$q : Q = AO : OB = 2 : 3.$$

Betrachtet derowegen, daß beide Körper vermög ihrer Schwere zu fallen trachten, aber beide durch den Hebel und seinen Ruhepunkt daran verhindert werden, nichts desto weniger üben sie ihre Bemühung zu fallen aus. Wenn nun B in einem gewissen kleinen Zeitraum

me

me den Bogen BE beschreibt, so kan A nicht anders als den Bogen AD in eben der Zeit beschreiben; nun aber stellen diese Bögen die durchlaufenen Räume, und folglich die Geschwindigkeiten vor §. 11, und diese verhalten sich wie ihre Radien §. 148. Geomet. also verhalten sich auch die Geschwindigkeiten wie diese Radien oder Abstände, weil ferner die Bemühung der Schwere gleich dem Produkt aus der Masse oder Schwere in die Geschwindigkeit ist, und beide Körper gleiche Schwere haben, so verhalten sich die Bemühungen ihrer Schwere wie die Geschwindigkeiten oder Abstände von dem Ruhepunkt d. i.

$$q : Q = AO : OB = 2 : 3.$$

Z u s a z.

§. 180. Je grösser also der Abstand eines Körpers von seinem Ruhepunkt ist, um so grösser ist auch das Bemühen seiner Schwere, und um dasselbe zu finden, darf man nur die Masse desselben mit diesem Abstand multipliciren.

In diesem Lehrsatze beruhet eigentlich der Grund der Schnellwagen, und überhaupt aller Gegengewichte. Es ist daher leicht zu begreifen, wie man an der erstern durch ein ziemlich leichtes angehangenes Gewicht, grosse Lasten abwiegen könne.

Lehrsatz.

§. 181. Wenn zween Körper an einen Hebel, der für sich ganz ohne Schwere ist, angebracht werden, und ihre Massen oder Gewichte mit ihren Abständen von dem Ruhepunkt in verkehrter Verhältnisse stehen, so halten sie einander das Gleichgewicht und umgekehrt.

Fig. 37.

Beweis: Wenn wir die Masse oder das Gewicht des Körpers in $A = M$, und die von dem in $B = m$ nennen, und sich dieselben vermög Bedingnis wie ihre Abstände umgekehrt verhalten, so ist

$$M : m = OB : OA.$$

Wenn wir ferner die Geschwindigkeit von $A = c$ und die von $B = C$ setzen, so ist, weil sich solche wie die Abstände verhalten:

$$c : C = OA : OB.$$

Multiplizieren wir nun die Sätze der beiden Proportionen mit einander, so ist

$$Mc : mC = OB \times OA : OA \times OB.$$

Nun aber stellet die vordere Verhältniss die Bemühungen der Schwere der beiden Körper vor §. 5. die hintere aber bestehet aus den Produkten der Abstände, und ihre Glieder sind einander gleich, also sind auch die vordere einander gleich d. i. $Mc = mC$, und folglich stehen beide Körper im Gleichgewichte §. 172. oder umgekehrt.

Eben dieses hat auch an einen Hebel der eine Schwere hat, oder ein physikalischer ist, statt, wenn zuvor die ungleiche Schwere seiner ungleich langen Armen auf was immer für Art ins Gleichgewicht gebracht wird.

A u f g a b e.

§. 182. Wenn zween ungleich schwere Körper an einen Hebel angebracht sind, und die ganze Länge des Hebels bekant ist, wie der Ruhepunkt zu finden, in welchen beide Körper, wenn der Hebel an demselben aufgehangen oder unterstützet wird, im Gleichgewicht stehen?

Auf.

Auflösung: 1. Multipliciret das Gewicht des Körpers A durch die ganze Länge AB des Hebels, d. i. durch den Abstand ihrer besondern Schwerpunkten. Fig. 37.

2. Dividiret dieses Produkt durch die Summe des Gewichts von beiden Körpern, so ist der Quotient gleich dem Abstände des gesuchten Ruhepunkts von B.

Beweis: Wenn ihr das Gewicht des Körpers A durch M und das von Körper B durch m ausdrückt, so ist $M : m = OB : OA$. §. 181.

nun aber ist auch

$M + m : M = OB + OA : OB$. §. 214. Rechenf.

und also $\frac{M \times (OB + OA)}{M + m} = OB$.

Weil nun $OB + OA = AB$,

so ist auch $\frac{M \times AB}{M + m} = OB$

und folglich $AB - OB = AO$.

A u f g a b e.

§. 183. Wie der Schwerpunkt eines Trapeziums zu finden?

Auflösung: 1. Theilet das gegebene Trapezium Fig. 38. ABCD durch eine Diagonal BD in zwei Dreiecke ABD, und BCD.

2. Suchet eines jeden Dreiecks seinen Flächeninhalt §. 178. Geomet.

3. Suchet die Schwerpunkte E und F der beiden Dreiecke §. 177. oder §. 178. und ziehet sie mit einer geraden Linie EF zusammen, so wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Dreiecke in dieser Linie irgendwo enthalten sein.

4. Theilet sowohl AB als DC in zween gleiche Theile, und ziehet die Theilungspunkten mit einer geraden Linie GH zusammen, so wird dieselbe ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums, und folglich der Schwerpunkt desselben ebenfalls darinnen und zwar in dem Durchschnittspunkt X der Linie EF sein oder

Betrachtet den Flächeninhalt der beiden Dreiecke als ihre Gewichte oder Massen, und die Linie EF als die Länge eines Hebels, an welchen ihr den Ruhepunkt X, in dem beide Dreiecke im Gleichgewicht stehen, zu suchen habt. Wenn ihr also dieser Betrachtung zufolge den Inhalt des Dreiecks ABD $\equiv m$ und den von BCD $\equiv M$ ausdrucket, so ist

$$m + M : m \equiv EF : FX \quad \S. 182.$$

$$\text{und folglich } \frac{m \times EF}{m + M} = FX$$

dem verlangten Ruhepunkt, der zugleich der Schwerpunkt des Trapeziums ist.

Z u s a z.

Fig. 39.

§. 184. Wäre der Schwerpunkt eines Trapezoides ABCD zu suchen, so theilet denselben erstlich durch die Diagonal DB in zwei Dreiecke ABD und BCD; suchet ihre Inhalte nach §. 178. Geomet. ihre Schwerpunkten E und F aber nach §. 177. und ziehet sie mit einer geraden Linie EF zusammen; ferner ziehet die Diagonal AC, suchet den Inhalt der beiden Dreiecke ABC, und ACD, und auch ihre Schwerpunkten G und I wie zuvor, ziehet solche ebenfalls mit einer geraden Linie GI zusammen, so wird sich der Schwerpunkt X des Trapezoides in dem Durchschnitte der beiden Linien EF und GI befinden §. 182. oder wenn ihr euch der zwoten Diagonale AC nicht bedienen wollet, so setzet wie in voriger Aufgabe

$$m + M : m = EF : FX$$

und also ist $\frac{m \times EF}{M + m} = FX.$

Aufgabe.

§. 185. Wenn mehrere schwere Körper an einen Hebel angebracht, und ihre Entfernungen von einander gegeben sind, wie der allgemeine Ruhepunkt an dem Hebel zu finden, in welchen sie im Gleichgewicht stehen?

Auflösung: Es sei, daß an dem Hebel AF fünf Fig. 40. Körper von verschiedener Schwere und in den verschiedenen Entfernungen $ABDEF$ angebracht wären, so suchet erstlich von A und B den Ruhepunkt G , und von E und F den Ruhepunkt H nach §. 182.

2. Bildet euch ein, als ob die Körper in E und F in ihrem Ruhepunkt H zusammen aufgehangen wären, und suchet nun auch den Ruhepunkt I zwischen D und H .

3. Stellet euch abermal vor, als ob die in A und B befindlichen Körper nun in G , und die in F , E und D in I zusammen aufgehangen wären. Suchet also zwischen G und I den gemeinschaftlichen Ruhepunkt C auf die vorige Art, so werden, wenn der Hebel in demselben aufgehangen oder unterstützt wird, die fünf in $ABDEF$ angebrachte Körper in Gleichgewicht stehen, auf die nehmliche Art müste man verfahren, wenn noch mehrere Körper vorhanden wären.

Aufgabe.

§. 186. Wie der Schwerpunkt einer unregelmäßigen Polygonfläche zu finden?

Auf:

Fig. 41.

Auflösung: 1. Theilet das Polygon $ABCDE$ durch Diagonalen in so viele Dreiecke weniger zwei, als es Seiten hat.

2. Berechnet den Flächeninhalt eines jeden Dreiecks nach §. 178. Geomet. und suchet ihre besondere Schwerpunkte nach §. 177.

3. Setzt die Flächeninhalte zweier nebeneinander liegenden Dreiecken wie ABC und CAE als ihre Schwere, den Abstand FG ihrer Schwerpunkte aber als einen Hebel an, an dem die zwei Dreiecke angebracht sind, und suchet daran den Ruhepunkt, oder vielmehr den gemeinschaftlichen Schwerpunkt L der beiden Dreiecken, oder des Trapezoides $ABCE$ nach §. 183 u. 184..

4. Ziehet diesen gemeinschaftlichen Schwerpunkt L und den Schwerpunkt H des nächst folgenden Dreieckes CED abermal mit einer geraden Linie zusammen, sethet sie als einen Hebel an, an dessen beiden Enden die Flächen $ABCE$ und CED , deren Inhalt die Schwere derselben vorstellt, angebracht wären, und suchet den Ruhepunkt d. i. den gemeinschaftlichen Schwerpunkt I nach §. 183 u. 184. so ist derselbe der Schwerpunkt der ganzen Fläche $ABCDE$. Wären noch mehrere zu dem gegebenen Polygon gehörige Dreiecke vorhanden, so fahret auf gleiche Art fort den letztgefundenen Schwerpunkt mit dem des neuen Dreieckes zusammen zu ziehen, und auf dieser Linie den Ruhepunkt zu suchen, so wird endlich der letztgefundene der Schwerpunkt des gegebenen Polygons sein.

Lehrsatz.

§. 187. Die Länge eines Bogenbogens verhält sich zu seiner Sehne, wie der Radius desselben zum Abstand

stand des Schwerpunkts des Bogens von seinem Mittelpunkte.

Beweis: Theilet erstlich den Viertelbogen EBD in B Fig. 42. in zween gleiche Teile, ziehet die Sehnen ED, EB und BD, und nachdem ihr die letztere zwö ebenfalls wieder in zween gleiche Teile geteilet, die Theilungspunkten mit einer geraden Linie FG zusammen gehangen, und den Radius AB gezogen habt, so sind erstlich F und G die Schwerpunkten beider Sehnen EB und BD §. 176. und wenn ihr FG als einen Hebel betrachtet, der durch den Radius AB in C in zween gleiche Teile geteilet wird, und an dessen beiden Enden die zwö Sehnen EB und BD, welche man von gleicher Schwere zu sein annehmen kan §. 176. angebracht sind, so ist klar, daß C der Ruhepunkt des Hebels oder der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Sehnen sei. §. 174. Ferner ziehet die Linie AG, und betrachtet, daß wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken BGA, GCA und BID. §. 139. Geomet.

$$BD : DI = AG : AC$$

$$\text{und } 2BD : 2DI = EB + BD : ED$$

Folglich ist $EB + BD : ED = AG : AC$.

D. i. die Summe der Sehnen EB und BD verhält sich zur ganzen Sehne DE, wie die Linie AG zum Abstand AC des Schwerpunkts von Mittelpunkte des Bogens.

Theilet ihr ferner den Bogen in vier gleiche Teile, und ziehet die Sehnen EH, HB, BL, LD; theilet jede in zween gleiche Teile, und ziehet die Theilungspunkten mit NO und PQ zusammen, so sind sie mit EB und BD parallel, und werden wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken NOH und EBH, wie auch PQL und BDL durch die Radien AH und AL in S und X in zween gleiche Teile geteilet. Betrachtet ihr nun

NO

NO und PQ als Hebel, an deren Enden die vier Sehnen angebracht sind, die man mit einer Schwere begabt ansehen kan, so sind S und X die Ruhepunkten an denselben §. 174.

Ziehet ihr ferner diese zween Ruhepunkten S und X mit einer geraden Linie, die durch den Radius AB in V in zween gleiche Teile geteilet wird, zusammen, und sehet sie abermal als einen Hebel an, an dessen ieden Ende S und X zwö der vier Sehnen mit ihrer Schwere würken, so ist V der gemeinschaftliche Ruhepunkt oder Schwerpunkt der vier Sehnen §. 174.

Nachdem die Linie AQ gezogen worden, so betrachtet, daß der Winkel XAQ den halben Bogen LD und LDG den halben Bogen BL = LD zu seinem Maaß hat, §. 77. Geomet. folglich sind sie einander gleich, und die rechtwinkelige Dreiecke AQX und DGL einander ähnlich; derowegen ist

$$AQ : AX = DL : DG$$

$$\text{und } 2DL : 2DG = DL + LB : DB$$

folglich ist auch $AQ : DL + LB = AX : DB$.

Auf eben diese Art sind die zwei rechtwinkelige Dreiecke AVX und BID einander ähnlich, weil nemlich der Winkel VAX den Bogen BL und BDI den Bogen EHB

$\frac{2}{2} = BL$ zu seinen Maaß hat, und folglich einan-

der gleich sind. Derowegen ist wiederum:

$$AX : BD = AV : DI$$

und also auch $AQ : DL + LB = AV : DI$

$$\text{oder } DL + LB : DI = AQ : AV$$

$$\text{folglich } 2DL + 2LB : 2DI = AQ : AV$$

$$\text{d. i. } DL + LB + BH + HE : ED = AQ : AV.$$

D. i. die Summe der vier Sehnen verhält sich zur Sehne des ganzen Bogens, wie die Linie AQ zum

Abstand des Schwerpunkts V von dem Mittelpunkte des Bogens.

Verteilet man nun den ganzen Bogen in unendlich kleine Teile, so werden derselben kleine Sehnen gleich, und die Linie AQ dem Radius gleich werden, und läßt sich von ihnen das nehmliche wie hier annehmen, also ist auch erwiesen, daß die Länge eines Bogens sich zu seiner Sehne, wie der Radius zum Abstand des Schwerpunkts des Bogens von seinem Mittelpunkte verhalte.

Die Anfänger müssen sich mit diesem etwas weitschichtigen Beweis befriedigen, weil er sich nicht wohl kürzer geben läßt ohne die höhere Geometrie zu Hülfe zu nehmen, und dennoch zur Einsicht und Verständnis des folgenden notwendig ist.

Aufgabe.

§. 188. Wie der Schwerpunkt eines Viertelbogens Fig. 42. zu finden, dessen Radius und Grade gegeben sind?

Auflösung: 1. Nehmet den Radius AB anfänglich in solchen Teilen an, als ihr den Sinus totus in der Sinustafel findet; dupliret denselben, um den Durchmesser zu haben. Suchet hierauf durch eine bekante Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis den Umkreis des ganzen Viertels, und saget: wie 360 Grade zur Anzahl der Grade des Bogens, eben so verhält sich der ganze Umkreis zum Bogen selbst.

2. Halbiret die Anzahl der Grade des gegebenen Bogens, nehmet für dieselbe den Sinus aus der Tafel, und dupliret ihn, so habt ihr die Länge der Sehne ED des Bogens. §. 428. Nr. 6. Geomet.

3. Gezet nach obigen Lehrsaß: wie die Länge des gegebenen Bogens EBD zu seiner Sehne ED in Theilen des Sinus totus, eben so verhält sich der Radius AB zum Abstand AV des Schwerpunktes von Mittelpunkt in dem gegebenen Theilen des Radius d. i.

$$EBD : ED = AB : AV.$$

3. B. Es sei ein Bogen von 142 Grad, und dessen Radius = 5148''' gegeben, und man nähme den Sinus totus = 100000, und die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis wie 1000 : 3141 an, so ist

$$1000 : 3141 = 200000 : x$$

$$\text{und } \frac{200000 \times 3141}{1000} = 628200 \text{ dem ganzen Umkreis.}$$

zen Umkreis.

$$\text{Ferner } 360^\circ : 142^\circ = 628200 : x$$

$$\text{und } \frac{628200 \times 142}{360} = 247790 \text{ dem Bogen.}$$

$$\text{Sinus von } 71^\circ = 94552 = DI$$

$$\text{und } 94552 \times 2 = 189104 \text{ der Sehne ED.}$$

$$\text{Endlich } 247790 : 189104 = 5148''' : x$$

$$\text{und } \frac{189104 \times 5148}{247790} = 3928''' \text{ Abstand}$$

des Schwerpunktes von Mittelpunkt des Bogens auf dem Radius AB, der den Bogen in zween Theile theilet.

Z u s a z.

Fig. 43. §. 189. Wäre der Schwerpunkt zu einem halben Birkelbogen EBD zu finden, so ist nach §. 188.

EBD:

$$EBD : ED = AB : AC$$

Weil aber $ED = 2AB$, und $\frac{EBD}{2} = EB$

so ist $EBD : 2AB = AB : AC$

$$\text{und } \frac{2AB^2}{EBD} = AC$$

$$\text{folglich } \frac{AB^2}{EB} = AC.$$

D. i. man mus den Radius quadriren, und das Quadrat mit der Länge des Viertelzirkelbogens dividiren, um den Abstand des Schwerpunktes C von dem Mittelpunkt A auf dem Radius AB, der perpendicular auf ED ist, zu bekommen.

Aufgabe.

§. 190. Wie der Schwerpunkt eines Ausschnittes (Sector) einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Wenn ABEDA der Ausschnitt, in Fig. 44. welchen der Schwerpunkt zu suchen ist, so ziehet in demselben mit einem Radius $AF = \frac{2}{3} AB$ den Bogen FIG; suchet seine Länge in Theilen des Radius, und auch die Länge der Sehne FG nach §. 188.

$$2. \text{ Setzet: } FIG : FG = AI : AC.$$

$$\text{Folglich ist } \frac{FG \times AI}{FIG} = AC \text{ dem Abstand des}$$

Schwerpunktes C des Ausschnittes von seinem Mittelpunkt A auf dem Radius AE, der den Ausschnitt in zween gleiche Theile theilet.

Beweis: Bildet euch ein, als ob der Ausschnitt ABEDA in unendlich schmahle Ausschnitte zerteilet wäre;

wäre; da nun ihre Bögen unendlich klein sind, so kann man jeden als eine gerade Linie, und folglich die Ausschnitte selbst als Dreiecke ansehen; nun aber sind die Schwerpunkten dieser Dreiecke $\frac{1}{3}AB$: oder $\frac{1}{3}AE = AI = AF$ von A entfernt §. 177 u. 178, folglich befinden sich dieselbe alle in den Bogen FIG, und wenn man daher den Schwerpunkt C zu diesem Bogen nach §. 188. sucht, so ist derselbe zugleich der Schwerpunkt des Ausschnittes.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 45. §. 191. Hättet ihr den Schwerpunkt einer halben Zirkelfläche BED zu finden, so ziehet erstlich mit einem Radius $AI = \frac{1}{3}AE$ den Bogen FIG, und sehet:

$$FIG : FG = AI : AC. \quad \S. 190.$$

Folglich ist
$$\frac{FG \times AI}{FIG} = AC.$$

Weil aber $FG = 2AI$,

so ist
$$\frac{2AI \times AI}{FIG} = AC.$$

Weil ferner $\frac{FIG}{2} = FI$

so ist
$$\frac{AI^2}{FI} = AC$$

und da $AI = \frac{1}{3}AE$, folglich auch $FI = \frac{1}{3}BE$ ist,

so ist endlich
$$\frac{\frac{1}{9}AE^2}{\frac{1}{3}BE} = AC.$$

D. i. Man mus $\frac{1}{9}$ von dem Radius AE der halben Zirkelfläche quadriren, und mit $\frac{1}{3}BE$ d. i. mit der Länge des Bogens von 60 Grad dividiren, so ist der Quotient $= AC$ dem Abstand des Schwerpunkts von Mittelpunkt A der halben Zirkelfläche auf dem Radius AE der Perpendicular auf BD stehet gleich.

Auf.

Aufgabe.

§. 192. Wie der Schwerpunkt eines Abschnittes einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Suchet den Flächeninhalt des Aus- Fig. 46. schnittes ABEDA, des Abschnittes BEDB selbst, und des Dreiecks ABD nach §. 216. 218. 178. Geom.

2. Suchet den Schwerpunkt C des Dreiecks ABD nach §. 177. und auch den Schwerpunkt F des Ausschnittes ABEDA.

3. Drückt den Inhalt des Dreiecks ABD durch M, und den des Abschnittes BEDB durch m aus und setzt:

$$m : M = FC : FG.$$

Folglich ist $\frac{M \times FC}{m} = FG$ dem Abstand des Schwerpunktes G des Abschnittes von dem Schwerpunkt F des Ausschnittes.

Beweis: Betrachtet, daß F der Schwerpunkt des Ausschnittes zugleich der gemeine Schwerpunkt des Dreiecks ABD, und des Abschnittes BEDB sei, weil der erstere wirklich aus den letztern zweien besteht. Gehet ihr nun CG als einen Hebel an, dessen Ruhepunkt in F, und an dessen einen Ende C der Inhalt oder die Schwere des Dreiecks ABD, an dem andern G aber der Inhalt oder die Schwere des Abschnittes BEDB angebracht ist, so könnt ihr schliessen, daß:

$$m : M = FC : FG. \text{ §. 181.}$$

und folglich $\frac{M \times FC}{m} = FG.$

Z u s a z.

Fig. 47. §. 193. Aus dem nehmlichen Grunde, und fast auf ähnliche Art läßt sich der Schwerpunkt von Flächen finden, die aus mehreren zusammengesetzt betrachtet werden können. Als z. B. es würde der Schwerpunkt in der Fläche ABCDEA die aus einer halben Zirkelfläche und Rechteck zusammengesetzt ist, verlangen; so sucht erstlich den Inhalt des erstern §. 213. Geomet. und benennet ihn mit m ; und seinen Schwerpunkt F §. 191. und dann auch den Inhalt des andern §. 168. Geomet. benennet ihn mit M , und seinen Schwerpunkt G §. 170. alsdann aber sehet:

$$m + M : M = FG : FX. \text{ §. 182.}$$

folglich ist $\frac{M \times FG}{m + M} = FX$ dem Abstand des Schwerpunkts X der zusammengesetzten Fläche von dem Schwerpunkte F der halben Zirkelfläche.

Z u s a z.

Fig. 48. §. 194. Wäre der Schwerpunkt einer Fläche wie BOPCRB, woran die krumme Linie ein Zirkelbogen ist, zu finden; so sucht erstlich den Flächeninhalt des Abschnittes BRCB; den des Dreieckes ABC, und des Trapeziums AOPC nach §. 218. 178. 199. benennet den des erstern mit m , den des zweiten mit n , und den des dritten mit q . Ferner sucht auch den Schwerpunkt F des Abschnittes BRCB §. 192. den Schwerpunkt G des Dreieckes ABC §. 177. und auch den Schwerpunkt H des Trapeziums AOPC. §. 183. Ziehet durch FG eine gerade Linie, sehet sie als einen Hebel an, und betrachtet, daß alle Teile des Dreieckes ABC in ihren Schwerpunkt G im Gleichgewicht stehen, und daß der Abschnitt BRCB und die Fläche BACRB

BACRB zusammen den Inhalt desselben ausmachen. Bildet euch ferner ein, daß der Inhalt m oder die Schwere des Abschnittes in F , der Inhalt, oder die Schwere von BACRB $= n - m$ auf der verlängerten Linie FG irgend wo in I angebracht, und G der Ruhepunkt des Hebels FI sei, so findet ihr die Entfernung GI oder vielmehr den Schwerpunct I der Fläche BACRB, wenn ihr sehet;

$$n - m : m = GF : GI$$

folglich ist $\frac{m \times GF}{n - m} = GI$.

Ziehet ihr nun I und H ebenfalls wieder mit einer geraden Linie zusammen, sehet sie als einen Hebel an, an dessen einem Ende I der Inhalt oder die Schwere von BACRB $= n - m$, an dem andern H aber der Inhalt oder die Schwere von AOPC $= q$ angebracht wäre, so habt ihr eigentlich an diesen Hebel den Ruhepunkt L zu suchen indem ihr sehet:

$$n - m + q : q = IH : IL$$

folglich ist $\frac{q \times IH}{n - m + q} = IL$

dem Abstände des Ruhepunktes von I, welcher zugleich auch der Schwerpunct der ganzen Fläche BOPCRB ist.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Schwerpuncten von verschiedenen zusammengesetzten Flächen finden, wir werden in der Folge sehen, zu was sie eigentlich dienen können. Man laßet es übrigens der Neugierde und dem Vergnügen der Anfänger über, wie die wahre Lage der solcher gestalt bestimmten Schwerpuncten in Ansehung der Seiten der Flächen durch die Trigonometrie zu finden sei.

Lehrsatz.

§. 195. Der Inhalt einer Fläche, die aus der ~~fortwährender~~ Bewegung einer Linie, oder der Inhalt eines Körpers, der aus der Bewegung einer Fläche entsteht, ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg, den ihr Schwerpunkt bei der Erzeugung beschreibt.

Beweis: Wenn man sich vorstellt, daß eine Fläche durch die Bewegung einer Linie, oder ein Körper durch die Bewegung einer Fläche erzeugt werde, so sieht man, daß ihr Inhalt aus lauter Elementen bestehe, die dem erzeugenden gleich sind. Eignet man nun dem erzeugenden Elemente den so vielen Teil der Schwere der Fläche oder des Körpers zu, als Elemente vorhanden sind, und bildet sich ein, die Schwere eines solchen Elements sei in dessen Schwerpunkt versamlet, so läßt sich die ganze Schwere der Fläche oder des Körpers durch die Schwere des erzeugenden Elements multiplicirt durch die Länge des Wegs, welchen der Schwerpunkt desselben bei der Erzeugung machen mußte, ausdrücken; weil wirklich so viele Elemente vorhanden sind, als die Länge dieses Wegs beträgt. Nun aber kan man das Gewicht, oder die Masse, oder den Inhalt von gleichartigen Flächen oder Körpern eines für das andere nehmen §. 167.; also kan man auch sagen, daß der Inhalt einer Fläche oder eines Körpers, welcher aus der Bewegung einer Linie oder Fläche entstanden ist, dem Produkte aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg den ihr Schwerpunkt beschreibt, gleich sei.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 49. §. 196. Um also 1. den Flächeninhalt eines Rectangels ABFE zu erhalten, muß man das erzeugende Ele-

Element AB durch die Länge des Weges CD , den dessen Schwerpunkt C beschreibt, multipliciren.

2. Ist der Flächeninhalt eines Kreises gleich dem Fig. 50. Produkt seines Radius AB in den Umkreis $CEDC$, welchen der Schwerpunkt C des Radius, oder vielmehr der halbe Radius beschreibt.

3. Der Flächeninhalt der halben Krone $AHFDIB$ Fig. 51. ist gleich dem Produkt der erzeugenden Linie AB in den Weg CGE , welchen der Schwerpunkt C der erzeugenden Linie AB beschreibt.

Die Anfänger sehen, daß alles dieses mit den in der Geometrie angegebenen Gründen vollkommen übereinstimmig ist.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 197. 1. Der körperliche Inhalt eines Parallelopipedums ist also gleich dem Produkt des Inhaltes der erzeugenden Fläche in den Weg ihres Schwerpunktes.

2. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich Fig. 52. dem Produkte des Inhaltes der erzeugenden Fläche $ABED$ in den Umkreis CF , den der Schwerpunkt C beschreibt.

3. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich Fig. 53. dem Produkt der erzeugenden Fläche ABD in den Umkreis CIF ihres Schwerpunktes C .

4. Ist in einen Cylinder oder abgestutzten Kegel ein Fig. 54. anderer Körper, wie z. B. in fig. 54. ausgehöhlet, so ist ihre erzeugende Fläche $ABDE$, und der Weg welchen ihr Schwerpunkt C nehmen muß = dem Umkreis CIF , folglich der körperliche Inhalt gleich dem Inhalt der erzeugenden Fläche in dem Weg des Schwerpunktes.

144 I. Abschnitt. VI. Hauptstück.

NO und PQ als Hebel, an deren Enden die vier Sehnen angebracht sind, die man mit einer Schwere begabt ansehen kan, so sind S und X die Ruhepunkten an denselben S. 174.

Zieheth ihr ferner diese zween Ruhepunkten S und X mit einer geraden Linie, die durch den Radius AB in V in zween gleiche Teile geteilet wird, zusammen, und sehet sie abermal als einen Hebel an, an dessen ieden Ende S und X zwe der vier Sehnen mit ihrer Schwere würken, so ist V der gemeinschaftliche Ruhepunkt oder Schwerpunkt der vier Sehnen S. 174.

Nachdem die Linie AQ gezogen worden, so betrachtet, daß der Winkel XAQ den halben Bogen LD und LDG den halben Bogen BL = LD zu seinem Maaß hat, S. 77. Geomet. folglich sind sie einander gleich, und die rechtwinkelige Dreiecke AQX und DGL einander ähnlich; derowegen ist

$$AQ : AX = DL : DG$$

$$\text{und } 2DL : 2DG = DL + LB : DB$$

folglich ist auch $AQ : DL + LB = AX : DB$.

Auf eben diese Art sind die zwei rechtwinkelige Dreiecke AVX und BID einander ähnlich, weil nemlich der Winkel VAX den Bogen BL und BDI den Bogen EHB

$\frac{EHB}{2} = BL$ zu seinen Maaß hat, und folglich einan-

der gleich sind. Derowegen ist wiederum:

$$AX : BD = AV : DI$$

und also auch $AQ : DL + LB = AV : DI$

$$\text{oder } DL + LB : DI = AQ : AV$$

$$\text{folglich } 2DL + 2LB : 2DI = AQ : AV$$

$$\text{d. i. } DL + LB + BH + HE : ED = AQ : AV.$$

D. i. die Summe der vier Sehnen verhält sich zur Sehne des ganzen Bogens, wie die Linie AQ zum

Abstand des Schwerpunkts V von dem Mittelpunkt A des Bogens.

Verteilet man nun den ganzen Bogen in unendlich kleine Teile, so werden derselben kleine Sehnen dem Bogen selbst, und die Linie AQ dem Radius gleich werden, und läßt sich von ihnen das nehmliche wie hier erweisen, also ist auch erwiesen, daß die Länge eines Birkelbogens sich zu seiner Sehne, wie der Radius desselben zum Abstand des Schwerpunkts des Bogens von seinem Mittelpunkt verhalte.

Die Anfänger müssen sich mit diesem etwas weitschichtigen Beweis befriedigen, weil er sich nicht wohl kürzer geben läßt ohne die höhere Geometrie zu Hülfe zu nehmen, und dennoch zur Einsicht und Verständnis des folgenden nothwendig ist.

Aufgabe.

§. 188. Wie der Schwerpunkt eines Birkelbogens Fig. 42. zu finden, dessen Radius und Grade gegeben sind?

Auflösung: 1. Nehmet den Radius AB anfänglich in solchen Teilen an, als ihr den Sinus totus in der Sinustafel findet; dupliret denselben, um den Durchmesser zu haben. Suchet hierauf durch eine bekante Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis den Umkreis des ganzen Birkels, und saget: wie 360 Grade zur Anzahl der Grade des Bogens, eben so verhält sich der ganze Umkreis zum Bogen selbst.

2. Halbiret die Anzahl der Grade des gegebenen Bogens, nehmet für dieselbe den Sinus aus der Tafel, und duplirt ihn, so habt ihr die Länge der Sehne ED des Bogens. §. 428. Nr. 6. Geomet.

3. Gezet nach obigen Lehrsaß: wie die Länge des gegebenen Bogens EBD zu seiner Sehne ED in Theilen des Sinus totus, eben so verhält sich der Radius AB zum Abstand AV des Schwerpunktes von Mittelpunkt in dem gegebenen Theilen des Radius d. i.

$$EBD : ED = AB : AV.$$

3. B. Es sei ein Bogen von 142 Grad, und dessen Radius = 5148''' gegeben, und man nehme den Sinus totus = 100000, und die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis wie 1000 : 3141 an, so ist

$$1000 : 3141 = 200000 : x$$

$$\text{und } \frac{200000 \times 3141}{1000} = 628200 \text{ dem ganzen Umkreis.}$$

zen Umkreis.

$$\text{Ferner } 360^\circ : 142^\circ = 628200 : x$$

$$\text{und } \frac{628200 \times 142}{360} = 247790 \text{ dem Bogen.}$$

$$\text{Sinus von } 71^\circ = 94552 = DI$$

$$\text{und } 94552 \times 2 = 189104 \text{ der Sehne ED.}$$

$$\text{Endlich } 247790 : 189104 = 5148''' : x$$

$$\text{und } \frac{189104 \times 5148}{247790} = 3928''' \text{ Abstand}$$

des Schwerpunktes von Mittelpunkt des Bogens auf dem Radius AB, der den Bogen in zween Theile theilt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 43. §. 189. Wäre der Schwerpunkt zu einem halben Bogenbogen EBD zu finden, so ist nach §. 188.

EBD :

$$EBD : ED = AB : AC$$

Weil aber $ED = 2AB$, und $\frac{EBD}{2} = EB$

so ist $EBD : 2AB = AB : AC$

$$\text{und } \frac{2AB^2}{EBD} = AC$$

$$\text{folglich } \frac{AB^2}{EB} = AC.$$

D. i. man mus den Radius quadriren, und das Quadrat mit der Länge des Viertelzirkelbogens dividiren, um den Abstand des Schwerpunktes C von dem Mittelpunkt A auf dem Radius AB, der perpendicular auf ED ist, zu bekommen.

Aufgabe.

§. 190. Wie der Schwerpunkt eines Ausschnittes (Sector) einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Wenn ABEDA der Ausschnitt, in Fig. 44. welchen der Schwerpunkt zu suchen ist, so ziehet in demselben mit einem Radius $AF = \frac{2}{3} AB$ den Bogen FIG; suchet seine Länge in Theilen des Radius, und auch die Länge der Sehne FG nach §. 188.

$$2. \text{ Setzet: } FIG : FG = AI : AC.$$

Folglich ist $\frac{FG \times AI}{FIG} = AC$ dem Abstand des

Schwerpunktes C des Ausschnittes von seinem Mittelpunkt A auf dem Radius AE, der den Ausschnitt in zween gleiche Theile theilet.

Beweis: Bildet euch ein, als ob der Ausschnitt ABEDA in unendlich schmale Ausschnitte zerteilet wäre;

wäre; da nun ihre Bögen unendlich klein sind, so kan man jeden als eine gerade Linie, und folglich die Ausschnitte selbst als Dreiecke ansehen; nun aber sind die Schwerpunkten dieser Dreiecke $\frac{1}{3}AB$ oder $\frac{1}{3}AE = AI = AF$ von A entfernt §. 177 u. 178, folglich befinden sich dieselbe alle in den Bogen FIG, und wenn man daher den Schwerpunkt C zu diesem Bogen nach §. 188. suchet, so ist derselbe zugleich der Schwerpunkt des Ausschnittes.

Z u s a z.

Fig. 45. §. 191. Hättet ihr den Schwerpunkt einer halben Zirkelfläche BED zu finden, so ziehet erstlich mit einem Radius $AI = \frac{1}{3}AE$ den Bogen FIG, und sehet:

$$FIG : FG = AI : AC. \text{ §. 190.}$$

$$\text{Folglich ist } \frac{FG \times AI}{FIG} = AC.$$

$$\text{Weil aber } FG = 2AI,$$

$$\text{so ist } \frac{2AI \times AI}{FIG} = AC.$$

$$\text{Weil ferner } \frac{FIG}{2} = FI$$

$$\text{so ist } \frac{AI^2}{FI} = AC$$

$$\text{und da } AI = \frac{1}{3}AE, \text{ folglich auch } FI = \frac{1}{3}BE \text{ ist,}$$

$$\text{so ist endlich } \frac{\frac{1}{9}AE^2}{\frac{1}{3}BE} = AC.$$

D. i. Man mus $\frac{1}{9}$ von dem Radius AE der halben Zirkelfläche quadriren, und mit $\frac{1}{3}BE$ d. i. mit der Länge des Bogens von 60 Graden dividiren, so ist der Quotient = AC dem Abstand des Schwerpunkts von Mittelpunkt A der halben Zirkelfläche auf dem Radius AE der Perpendicular auf BD stehet gleich.

Auf.

Aufgabe.

§. 192. Wie der Schwerpunkt eines Abschnittes einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Suchet den Flächeninhalt des Aus- Fig. 46. schnittes ABEDA, des Abschnittes BEDB selbst, und des Dreiecks ABD nach §. 216. 218. 178. Geom.

2. Suchet den Schwerpunkt C des Dreiecks ABD nach §. 177. und auch den Schwerpunkt F des Abschnittes ABEDA.

3. Drückt den Inhalt des Dreiecks ABD durch M, und den des Abschnittes BEDB durch m aus und setzt:

$$m : M = FC : FG.$$

Folglich ist $\frac{M \times FC}{m} = FG$ dem Abstand des Schwerpunktes G des Abschnittes von dem Schwerpunkt F des Abschnittes.

Beweis: Betrachtet, daß F der Schwerpunkt des Abschnittes zugleich der gemeine Schwerpunkt des Dreiecks ABD, und des Abschnittes BEDB sei, weil der erstere wirklich aus den letztern zweien besteht. Gehet ihr nun CG als einen Hebel an, dessen Ruhepunkt in F, und an dessen einen Ende C der Inhalt oder die Schwere des Dreiecks ABD, an dem andern G aber der Inhalt oder die Schwere des Abschnittes BEDB angebracht ist, so könnt ihr schliessen, daß:

$$m : M = FC : FG. \text{ §. 181.}$$

und folglich $\frac{M \times FC}{m} = FG.$

Z u s a z.

Fig. 47. §. 193. Aus dem nehmlichen Grunde, und fast auf ähnliche Art läßt sich der Schwerpunkt von Flächen finden, die aus mehreren zusammengesetzt betrachtet werden können. Als z. B. es würde der Schwerpunkt in der Fläche ABCDEA die aus einer halben Zirkelfläche und Rechteckel zusammengesetzt ist, verlangt; so sucht erstlich den Inhalt des erstern §. 213. Geomet. und benennet ihn mit m ; und seinen Schwerpunkt F §. 191. und dann auch den Inhalt des andern §. 168. Geomet. benennet ihn mit M , und seinen Schwerpunkt G §. 170. alsdann aber sehet:

$$m + M : M = FG : FX. \text{ §. 182.}$$

folglich ist $\frac{M \times FG}{m + M} = FX$ dem Abstand des Schwerpunkts X der zusammengesetzten Fläche von dem Schwerpunkte F der halben Zirkelfläche.

Z u s a z.

Fig. 48. §. 194. Wäre der Schwerpunkt einer Fläche wie BOPCRB, woran die krumme Linie ein Zirkelbogen ist, zu finden; so sucht erstlich den Flächeninhalt des Abschnittes BRCB; den des Dreieckes ABC, und des Trapeziums AOPC nach §. 218. 178. 199. benennet den des erstern mit m , den des zweiten mit n , und den des dritten mit q . Ferner sucht auch den Schwerpunkt F des Abschnittes BRCB §. 192. den Schwerpunkt G des Dreieckes ABC §. 177. und auch den Schwerpunkt H des Trapeziums AOPC. §. 183. Zieht durch FG eine gerade Linie, sehet sie als einen Hebel an, und betrachtet, daß alle Teile des Dreieckes ABC in ihren Schwerpunkt G im Gleichgewicht stehen, und daß der Abschnitt BRCB und die Fläche BACRB

BACRB zusammen den Inhalt desselben ausmachen. Bildet euch ferner ein, daß der Inhalt m oder die Schwere des Abschnittes in F , der Inhalt, oder die Schwere von $BACRB = n - m$ auf der verlängerten Linie FG irgend wo in I angebracht, und G der Ruhepunkt des Hebels FI sei, so findet ihr die Entfernung GI oder vielmehr den Schwerpunkt I der Fläche $BACRB$, wenn ihr setzt;

$$n - m : m = GF : GI$$

folglich ist $\frac{m \times GF}{n - m} = GI$.

Zieheth ihr nun I und H ebenfalls wieder mit einer geraden Linie zusammen, sehet sie als einen Hebel an, an dessen einem Ende I der Inhalt oder die Schwere von $BACRB = n - m$, an dem andern H aber der Inhalt oder die Schwere von $AOPC = q$ angebracht wäre, so habt ihr eigentlich an diesen Hebel den Ruhepunkt L zu suchen indem ihr setzt:

$$n - m + q : q = IH : IL$$

folglich ist $\frac{q \times IH}{n - m + q} = IL$

dem Abstände des Ruhepunktes von I , welcher zugleich auch der Schwerpunkt der ganzen Fläche $BOPCRB$ ist.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Schwerpunkten von verschiedenen zusammengesetzten Flächen finden, wir werden in der Folge sehen, zu was sie eigentlich dienen können. Man laßet es übrigens der Neugierde und dem Vergnügen der Anfänger über, wie die wahre Lage der solcher gestalt bestimmten Schwerpunkten in Ansehung der Seiten der Flächen durch die Trigonometrie zu finden sei.

Lehrsatz.

Lehrsatz §. 195. Der Inhalt einer Fläche, die aus der Bewegung einer Linie, oder der Inhalt eines Körpers, der aus der Bewegung einer Fläche entsteht, ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg, den ihr Schwerpunkt bei der Erzeugung beschreibt.

Beweis: Wenn man sich vorstellt, daß eine Fläche durch die Bewegung einer Linie, oder ein Körper durch die Bewegung einer Fläche erzeugt werde, so sieht man, daß ihr Inhalt aus lauter Elementen bestehe, die dem erzeugenden gleich sind. Eignet man nun dem erzeugenden Elemente den so vielen Teil der Schwere der Fläche oder des Körpers zu, als Elemente vorhanden sind, und bildet sich ein, die Schwere eines solchen Elements sei in dessen Schwerpunkt versamlet, so läßt sich die ganze Schwere der Fläche oder des Körpers durch die Schwere des erzeugenden Elements multiplicirt durch die Länge des Wegs, welchen der Schwerpunkt desselben bei der Erzeugung machen mußte, ausdrücken; weil wirklich so viele Elemente vorhanden sind, als die Länge dieses Wegs beträgt. Nun aber kan man das Gewicht, oder die Masse, oder den Inhalt von gleichartigen Flächen oder Körpern eines für das andere nehmen §. 167.; also kan man auch sagen, daß der Inhalt einer Fläche oder eines Körpers, welcher aus der Bewegung einer Linie oder Fläche entstanden ist, dem Produkte aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg den ihr Schwerpunkt beschreibt, gleich sei.

Z u s a z.

Fig. 49. §. 196. Um also I. den Flächeninhalt eines Rectangels ABFE zu erhalten, muß man das erzeugende Ele-

Element AB durch die Länge des Weges CD , den dessen Schwerpunkt C beschreibt, multipliciren.

2. Ist der Flächeninhalt eines Kreises gleich dem Fig. 50. Produkt seines Radius AB in den Umkreis $CEDC$, welchen der Schwerpunkt C des Radius, oder vielmehr der halbe Radius beschreibt.

3. Der Flächeninhalt der halben Krone $AHFDIB$ Fig. 51. ist gleich dem Produkt der erzeugenden Linie AB in den Weg CGE , welchen der Schwerpunkt C der erzeugenden Linie AB beschreibt.

Die Anfänger sehen, daß alles dieses mit den in der Geometrie angegebenen Gründen vollkommen übereinstimmig ist.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 197. 1. Der körperliche Inhalt eines Parallelopipedums ist also gleich dem Produkt des Inhaltes der erzeugenden Fläche in den Weg ihres Schwerpunktes.

2. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich Fig. 52. dem Produkte des Inhaltes der erzeugenden Fläche $ABED$ in den Umkreis CF , den der Schwerpunkt C beschreibt.

3. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich Fig. 53. dem Produkt der erzeugenden Fläche ABD in den Umkreis CIF ihres Schwerpunktes C .

4. Ist in einen Cylinder oder abgestutzten Kegel ein Fig. 54. anderer Körper, wie z. B. in fig. 54. ausgehöhlet, so ist ihre erzeugende Fläche $ABDE$, und der Weg welchen ihr Schwerpunkt C nehmen muß = dem Umkreis CIF , folglich der körperliche Inhalt gleich dem Inhalt der erzeugenden Fläche in dem Weg des Schwerpunktes.

Fig. 55.

5. Wäre der Inhalt der fig. 55. vorgestellten Körper zu berechnen, so betrachtet, daß ABDE ihre erzeugenden Flächen, C derselben Schwerpunkten, CIF aber die Wege sind, welche sie zu beschreiben haben, deswegen ist nach obigen Lehrsatß ihr körperlicher Inhalt $\equiv ABDE \times CIF$.

Auf ähnliche Art läßt sich der Inhalt von allen Körpern, deren erzeugende Fläche sich um eine Achse drehet, finden; der sich sonst durch die gemeine Gründe der Geometrie nicht berechnen ließe. Es ist also die Mathematik durch diese sehr schöne Erfindung der Theorie des Schwerpunktes ungemein bereichert worden.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 198. Da man das Metäl an einer Kanne oder einen Boller (ohne ihren Schildzapfen) als einen Körper betrachten kan, der durch die Herumdrähung einer erzeugenden Fläche um eine Achse entstanden ist, so läßt sich auch der körperliche Inhalt, und folglich die Schwere desselben nach den angeführten Gründen berechnen, wenn man die ganze erzeugende Fläche nach Erfordernis in mehrere kleinere zerteilet, an denen sich die Schwerpunkten leichter nach den obigen Gründen finden lassen; hierauf die Umkreise oder Wege dieser besondern Schwerpunkten suchet, die Inhalte dieser besondern Körper nach §. 197. berechnet, und dieselbe endlich in eine Summe bringet, welche dem körperlichen Inhalt der Kanne oder des Bollers ohne ihren Schildzapfen gleich sein wird. Der körperliche Inhalt eines Schildzapfens aber läßt sich aus den bisher gegebenen Gründen nicht genau berechnen, sondern man mus dazu die höhere Geometrie zu Hülff nehmen. Man kan aber demselben durch Annäherung mittelst der gemei-

meinen Geometrie so nahe kommen, daß man die dabei gemachten Abweichungen in der Ausübung ohne aller Besorgnis hinweglassen kan.

Ubrigens ist leicht zu begreifen, wie nothwendig es überhaupt einem geschickten Artilleristen seie, die Schwere des Metals einer Kanne berechnen zu können, so oft eine nach neuen Proportionen zu entwerfen vorkommt.

L e h r s a t z.

§. 199. Der Schwerpunkt einer dreieckigten Pyramide $ABCS$ befindet sich in dem Durchschnitte G zweier geraden Linien SF und AE , die aus den Winkeln A und S , so den Flächen SBC und ABC entgegenstehen, auf ihre Schwerpunkten E und F gezogen worden; und der Abstand SG des Schwerpunktes auf der Linie SF ist $= \frac{1}{4} SF$.

Beweis: I. Betrachtet, daß die dreieckigte Pyramide $ABCS$ aus lauter Elementen bestehe, die der Grundfläche ABC ähnlich sind, und in arithmetischer Progression abnehmen; deswegen mus die gerade Linie SF , die aus dem Schwerpunkt F der Grundfläche nach S gezogen ist, durch alle Schwerpunkten dieser Elementen, und folglich auch durch den Schwerpunkt der Pyramide gehen. Ferner betrachtet, daß, weil die Pyramide dreieckig ist, man sowohl eine als die andere Seitenfläche derselben für die Grundfläche, und die gegenüberstehende Spitze der Pyramide ansehen könne. Nimmt man nun diesem zu folge die Seitenfläche BSC für die Grundfläche, und A für die Spitze an, und ziehet aus ihren Schwerpunkt E nach der Spitze A die Linie AE , so gehet dieselbe ebenfalls wieder durch die Schwerpunkten aller Elementen der Fläche BSC , und folglich auch durch den Schwerpunkt der

Fig. 56.

der Pyramide selbst, und weil ieder Körper nur einen Schwerpunkt haben kan, so müssen beide Linien SK und AE sich in dem Schwerpunkt G der Pyramide durchschneiden.

2. Ziehet ihr E und F zusammen, so sind die Dreiecke FED und ASD einander ähnlich, weil $DF = \frac{1}{3} AD$, und $DE = \frac{1}{3} DS$ ist, §. 178. und folglich FE und AS zu einander parallel sind. Aus eben der Ursach ist $FE = \frac{1}{3} AS$, und die Dreiecke FEG und ASG sind ebenfalls einander ähnlich; derowegen ist:

$$FE : AS = FG : SG$$

$$AS \text{ aber ist } = 3FE$$

$$\text{also ist } FE : 3FE = FG : SG$$

$$\text{folglich } \frac{3FE \times FG}{FE} = SG$$

$$\text{d. i. } 3FG = SG$$

$$\text{oder } SG = \frac{1}{3} SF.$$

Z u s a m m e n.

§. 200. Ist die Grundfläche der Pyramiden was immer für ein Polygon, so kan solche in lauter Dreiecke zerteilet werden, die man als Grundflächen so vieler Pyramiden, deren Spitzen in die gemeine Spitze der ganzen Pyramide zusammen laufen, ansehen kan. Bildet man sich ferner ein, daß von der Spitze dieser Pyramiden auf den Mittelpunkt der Schwere der Polygon Grundfläche eine Linie gezogen sei, und von einer geraden Fläche parallel mit der Grundfläche in der Entfernung von $\frac{1}{3}$ der von der Spitze nach dem Schwerpunkt gezogenen Linie durchschnitten werde, so gehet diese Fläche durch alle Schwerpunkten der dreieckigten Pyramiden, in welche die ganze zerteilet ist, und folglich durch den Schwerpunkt der polygonförmigen Pyramide.

ramiden selbst. Derwegen ist der Abstand des Schwerpunkts von der Spitze einer Pyramiden, sie mag was immer für ein Polygon zur Grundfläche haben, allezeit $\frac{1}{4}$ der Linie, so aus der Spitze der Pyramiden auf den Schwerpunkt der Grundfläche gezogen wird.

Z u s a z.

§. 201. Da man einen Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten ansehen kan, §. 258. Geom. so ist auch der Schwerpunkt desselben auf der Achse $\frac{1}{4}$ derselben von der Spitze entfernt.

A u f g a b e.

§. 202. Wie der Schwerpunkt eines mit seiner Grundfläche parallel abgestuften Kegels oder Pyramide zu finden?

Auflösung: 1. Berechnet den körperlichen Inhalt des ganzen Kegels oder der Pyramide und auch den des abgestuften und abgängigen Theiles nach §. 306. Geomet.

2. Suchet den Schwerpunkt des ganzen Kegels oder der Pyramide und auch von dem abgängigen Teile, und bildet euch ein daß diese zween Punkten mit einer geraden Linie zusammen gehangen wären, und man sie als einen Hebelarm zu betrachten hätte, an dessen einen Ende der Inhalt oder die Schwere des abgängigen Kegels oder Pyramide hiänge, an dem andern aber der Ruhepunkt wäre, und an den noch weiter verlängerten Teil der Inhalt oder die Schwere des abgestuften Kegel oder Pyramide angebracht wäre, folglich daß die Entfernung des Schwerpunkts des abgängigen Theiles von dem des abgestuften die ganze Länge des Hebels sei.

3. Gesetz: wie der Inhalt oder die Schwere des abgestuften Kegels oder der Pyramide zum Inhalt oder Schwere des abgängigen Theiles, eben so verhält sich die Entfernung der Schwerpunkte des ganzen und abgängigen Kegels oder Pyramide zur Entfernung der Schwerpunkte des ganzen Kegels oder Pyramide und abgestuften Theiles, d. i. der vierte Satz der Proportion drückt aus, um wie viel der Schwerpunkt des abgestuften Kegels oder der Pyramide noch näher bei der Grundfläche als der des ganzen Kegels oder Pyramide sei.

Lehrsatz.

§. 203. Der Schwerpunkt einer halben Kugel ist auf dem Radius, der auf ihrer Grundfläche perpendicular steht, $\frac{3}{8}$ desselben von dem Mittelpunkt der Kugel entfernt.

Fig. 57.

Beweis: Wenn man sich vorstellte, als ob um die halbe Kugel AFB ein Cylinder ADEB, und auch noch ein Kegel CDE, die beide mit der halben Kugel gleiche Grundflächen, und den Radius CF derselben zur Höhe haben, beschrieben wären, so ist der Inhalt der halben Kugel $= \frac{2}{3}$, der des Kegels aber $= \frac{1}{3}$ von dem Inhalt des Cylinders. Betrachtet man ferner, daß der Schwerpunkt H des Cylinders $= \frac{1}{2}$ CF, und der des Kegels G $= \frac{3}{4}$ CF von C entfernt sei, so ist klar, daß GH $= \frac{1}{4}$ CF sein müsse. Nimmt man nun an, daß die Schwere oder der Inhalt des Kegels in G, die der halben Kugel aber irgendwo in I angebracht, und der Schwerpunkt H des Cylinders der Ruhepunkt des Hebels sei, so ist, wenn man den Inhalt oder die Schwere des Kegels durch m, und den der halben Kugel durch n ausdrückt:

$$n : m = GH : HI$$

Nun

Nun aber ist $m = \frac{1}{2} n$ §. 327. Geomet.
folglich ist auch $HI = \frac{1}{2} GH = \frac{1}{4} CF$

und da $FH = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4} CF$,

so ist $FH + HI = FI = \frac{3}{4} CF$

und also $CF - FI = CI = \frac{1}{4} CF$

d. i. die Entfernung des Schwerpunkts I der halben Kugel ist $= \frac{1}{4}$ des Radius von dem Mittelpunkt C der halben Kugel.

Der Schwerpunkt eines Abschnittes von einer Kugel läßt sich durch die bisher angeführten Gründe nicht wohl bestimmen, sondern es muß die höhere Geometrie dazu zu Hülfe genommen werden. Um aber dennoch im Stande zu sein, denselben in erforderenden Fälle berechnen zu können, so setzen wir die durch die höhere Rechnung gefundene allgemeine Formel hierher. Nämlich wenn der Radius der Kugel, davon der gegebene Abschnitt herrühret, $= r$, und die Höhe des Abschnittes $= x$ angenommen wird, so ist $3r - x : 2r - \frac{1}{4} x = x$: zum Abstand des Schwerpunktes von dem höchsten Punkt des Abschnittes. Dieses kommt auch mit dem oben gegebenen Grunde den Schwerpunkt der halben Kugel zu berechnen überein. Denn wenn wir die halbe Kugel als einen Abschnitt, dessen Höhe dem Radius selbst gleich ist, ansehen, so ist nach der gleich angeführten Formel: $3r - r : 2r - \frac{1}{4} r = r$: zum Abstand des Schwerpunktes von dem höchsten Punkt der Halbkugel, den wir mit y benennen wollen. Folglich ist eigentlich

$$2r : 1\frac{1}{4}r = r : y$$

$$\text{und } \frac{rr + \frac{1}{4}rr}{2r} = y$$

sehen

setzen wir nun $r = 8$,

$$\text{so ist } \frac{64 + 16}{16} = 5.$$

Folglich ist der Abstand des Schwerpunkts $FI = \frac{5}{4} CF$, und es verbleibt für CI noch $\frac{3}{4}$.

A u f g a b e.

Fig. 58.

§. 204. Wie der Schwerpunkt I eines Körpers $AOPE$ in dessen Mitte ein Cylinder $BSUD$ ausgehöhlet ist, und der eigentlich aus der Umbrähung der Fläche $ABDE$, deren Seiten AB und ED parallel sind, um die Achse FG entstanden ist, zu finden?

Auflösung: 1. Suchet den Inhalt und Schwerpunkt der erzeugenden Fläche $ABDE$; berechnet mit Hülfe desselben den Inhalt des Körpers $AOPE$ nach §. 197. Nr. 5. und benennet ihn mit n .

2. Bildet euch ein, daß um diesen Körper auch ein Cylinder, der AO zu seinem Durchmesser und FG zu seiner Achse hat, beschrieben sei; berechnet dessen Inhalt, und drückt ihn durch m aus.

3. Gehet FG als einen Hebel an, an dessen einen Ende G die Schwere oder der Inhalt des Cylinders $AORL$, an dem andern F aber die Summe der Schwere oder des Inhaltes des Cylinders und des Körpers $AOPE$ angebracht ist, und suchet daran den Ruhepunkt I , in welchen beide Körper im Gleichgewicht stehen, nach §. 182. indem ihr setzet:

$$\frac{m \times FG}{m + n} = GI.$$

$$\text{und } FG - GI = FI,$$

so ist der Abstand des Schwerpunktes I des Körpers A O P E von den beiden parallelen Seiten der erzeugenden Fläche auf der Achse F G bestimmt.

Z u s a z.

§. 205. Auf eben diese Art läßt sich auch der Fig. 59. Schwerpunkt I des Körpers C F, der durch die Umdrehung der erzeugenden Fläche A B C um die Achse D E entstanden ist, und noch von vielen andern finden.

Z u s a z.

§. 206. Da die Schildzapfen einer Kanne eine solche Lage haben müssen, daß, wenn man die Kanne an denselben frei aufhänget, der hintere Teil derselben etwas schwerer als der vordere sei. Um also den wahren Ort der Schildzapfen zu bestimmen, ist erforderlich, daß man den Schwerpunkt der ganzen Kanne finde, um wissen zu können, wie weit die Schildzapfen noch vor denselben angelegt werden müssen, damit sie die obgedachte Eigenschaft erhalten. Um nun dieses zu bewerkstellen, so zeichnet die Kanne in ihrer natürlichen Grösse genau auf, zertheilet dieselbe bei den verschiedenen Verstärkungen durch Linien, so die Achse perpendicular durchschneiden, in so viele solche Körper, von welchen ihr nach den bisher gegebenen Anleitungen ihre Schwerpunkte finden könnet, sehet endlich die ganze Achse der Kanne als einen Hebel an, an welchen alle diese Körper in ihren verschiedenen Schwerpunkten angebracht sind, und suchet den gemeinschaftlichen Ruhepunkt daran nach §. 185. rucket nun diesen Punkt so weit vorwärts, bis der hintere Teil der Kanne das erforderliche Übergewicht erhält.

Es ist für sich klar, daß es einem gründlichen Artilleristen eben so nothwendig sei, den Ort der Schildzapfen einer Kanne richtig bestimmen zu können, als den Kubikinhalte des Metals und folglich die Schwere desselben zu berechnen. Jene Art, wo man die Kanne auf einen Papendeckel oder dünnen Bretel zeichnet, hernach ausschneidet, und mittelst einer durchgesteckten Nadel den Ruhepunkt durch Versuche findet, und denselben alsdenn etwas weiter vorrückt, um den Ort der Schildzapfen zu erhalten, ist freilich viel leichter, aber wie leicht zu erachten viel unrichtiger als die wir S. 206. vorschlagen; es bedienen sich aber auch nur diejenige davon, denen es an gehörigen Gründen der Mathematik fehlet, und die es folglich unmöglich besser machen können.

Lehrsatz.

S. 207. Wenn man sich einbildet, daß durch den Schwerpunkt was immer für eines Körpers eine Perpendikular auf dessen horizontal stehende Grundfläche gezogen sei, und dieselbe trift noch inner dieser Grundfläche auf, so ist der Körper außer Gefahr umzufallen, wenn sonst kein andere Kraft außer seiner Schwere in ihn wirkt; so bald aber diese Perpendikular auf einer Seiten außer die Grundfläche fällt, so wird der Körper auch gegen jene Seiten fallen müssen, wenn er von keiner andern Kraft aufgehalten wird.

Fig. 60.

Beweis: I. Wenn ein Körper z. B. wie AD gegen eine Seiten fallen sol, so ist klar, daß sich derselbe um einen der äußersten Punkten B an der Grundfläche als um einen Ruhepunkt bewegen, und der Schwerpunkt C desselben eigentlich den Bogen CB beschreiben müsse. Wenn nun die aus dem Schwerpunkt auf

auf die Grundfläche gezogene Perpendikular CA noch immer dieselbe trift, und man ziehet die Linie CB , so ist ebenfalls klar, daß der Punkt C niedriger als I sei; derowegen müste, wenn dieser Körper umfallen sollte, der Schwerpunkt von C bis in I steigen; da aber dieses wieder die Natur der Schwere ist, so ist auch derselbe außer Gefahr umzufallen.

2. Fallet aber die aus dem Schwerpunkt C auf die Grundfläche HB gezogene Perpendikular CA außer dieselbe, und man ziehet die Linie CB aus dem Schwerpunkt nach den Ruhepunkt, an welchen sich der Körper beim fallen herumdrähen mus, und auch den Bogen CF , den der Schwerpunkt beschreibt, so ist abermal klar, daß C der höchste Punkt in den Bogen CF sei, derowegen kan sich der Schwerpunkt in demselben nicht erhalten, sondern er mus vermög der Natur der Schwere näher gegen dem Mittelpunkt der Erde zu kommen trachten, folglich den Bogen CF beschreiben, oder der Körper mus fallen.

Z u s a z.

§. 208. Überhaupt kan man auch sagen, daß ein Körper außer Gefahr zu fallen ist, wenn die aus dessen Schwerpunkt nach dem Ruhepunkt gezogene Linie CB an den Punkt B einen stumpfen Winkel CBF mit der Grundlinie auswärts machet. Im gegenteil aber, daß der Körper unvermeidlich umfallen müsse, wenn dieser Winkel spizig wird.

Z u s a z.

§. 209. Je breitere Grundfläche oder mindere Höhe demnach ein Körper hat, ie weniger Gefahr ist er ausgesetzt umzufallen.



Zweiter Abschnitt.

Von Maschinen.

Erstes Hauptstück.

Von den einfachen Maschinen.

Erklärung.

S. 210.

Die Maschinen, so man einfache zu nennen pfleget, sind eigentlich folgende: der Hebel, das Rad an der Welle, die Flaschenscheibe, die schiefstehende Fläche oder der Keil, und die Schraube. Man heist sie aber einfach, weil sie wirklich nicht aus mehreren zusammengesetzt sind, und für sich allein bestehen.

Die gleich angeführten Gattungen der einfachen Maschinen kan man auch nur als eine, nemlich als einen Hebel betrachten, und man wird in der Folge sehen, daß sich keine Maschine, sie sei demnach einfach oder zusammengesetzt, denken läßt, deren Wirkung nicht als die eines oder mehrern angebrachten Hebels angesehen werden könnte.

Wenn man die Wirkungen der Maschinen blos theoretisch in Betrachtung ziehet, so wird weder auf ihre Grösse, noch auf die Materie, woraus sie bestehen, sondern blos auf die Verhältnis der Kraft

Kraft und Last, oder ihrer Geschwindigkeiten gesehen. Ferner werden alle Teile derselben ganz vollkommen zu sein angenommen, d. i. man stellt sich daran vor, als ob sie keine Schwere und Rauigkeit, sondern ihre Figur auf das vollkomste hätten; als ob diejenige welche vermög Erfordernis unbiegsam sein sollten, vollkommen steif, und die Biegsamen vollkommen biegsam wären. u. s. w. Da aber in der würllichen Ausübung keine Maschine in solcher Vollkommenheit teils wegen der Beschaffenheit der Materialien oder Bestandteilen, teils auch wegen vielen andern Hindernissen hergestellt werden kan, so ist es auch kein Wunder, wenn man die theoretische Berechnungen der Maschinen mit der würllichen Erfahrung niemals genau übereinstimmen findet. Indessen, wenn man von der Würfung einer Maschine doch in etwas gewis sein, und dieselbe nicht auf ein blosses gerade wohl ankommen lassen will, so ist es doch nöthig, dieselben aus diesem Gesichtspunkte zu betrachten, und die Grösse der Abweichung von der theoretischen Bestimmung nur durch Näherung zu suchen.

Von dem Hebel.

Was ein Hebel überhaupt sei, ist bereits S. 171. erklärt worden.

Erklärung.

S. 211. Nach den verschiedenen Stellungen der Kraft und Last in Ansehung des Ruhepunkts erhält der Hebel andere Benennungen, und zwar wenn die Kraft und Last an den äussersten Enden desselben, der

Ruhepunkt aber irgendwo zwischen ihnen angebracht, ist, so wird er ein Hebel der ersten Art; oder ein Druckhebel (*Vestis Heterodromus*) genent. Ist aber der Ruhepunkt und die Kraft an seinen äussern Enden, und die Last in der Mitte, so heist er ein Hebel der zweiten Art, oder ein Traghebel (*Vestis Homodromus*) und endlich, wenn der Ruhepunkt und die Last an beiden Enden, die Kraft aber in der Mitte angebracht ist, so ist es ein Hebel der dritten Art, oder ein Werfhebel. Besteht der Hebel aus keiner geraden sondern aus einer auf was immer für Art gekrümmt oder gebrochenen Linie, so wird er auch ein gebrochener Hebel genent.

Fig. 62.

63 u. 64.

Fig. 65.

u. 66.

So ist z. B. fig. 62. ein Hebel der ersten, fig. 63. der zweiten, und fig. 64. der dritten Art, wenn wir in ieder A. als die Last, B als die Kraft, und C als den Ruhepunkt annehmen fig. 65. und 66 aber sind gebrochene Hebel.

Erklärung.

§. 212. Diejenigen Teile des Hebels, da von einer von dem Ruhepunkt bis zur Last, und der andere von eben diesem bis zur Kraft reicht, werden die Hebelsarme genent, sie mögen demnach krumm oder gerade sein, oder mit einander einen Winkel machen.

So sind in den fig. 62 bis 66 AC und BC die Hebelsarme.

Erklärung.

§. 213. Die Richtungen der Kraft und Last sind jene gerade Linien, nach welchen dieselbe ihre Wirkungen ausüben.

So sind z. B. in den fig. 67. 68. 69. 70. Fig. 67.
 FB und EA die Richtungslinien der Kraft und 68. 69.
 Last, die verschiedene Stellungen haben können. und 70.

Erklärung.

§. 214. Die Abstände der Kraft und Last von dem Ruhepunkt sind iene Linien, so man sich aus dem Ruhepunkt auf die Richtungslinien der Kraft und Last perpendicular gezogen zu sein einzubilden hat.

So ist z. B. in den fig. 67. 68. 69. 70. Cb der Abstand der Kraft, und Ca der Abstand der Last.

Zusatz.

§. 215. Es ist also klar, daß, wenn der Hebel eine gerade Linie ist, und die Kraft und Last würden perpendicular in dieselbe, die Hebelsarme selbst die Abstände der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkte sein müssen, wie fig. 62. 63. 64. zu sehen.

Lehrsatz.

§. 216. Wenn die an einem geraden unbiegsamen und ohne Schwere betrachteten Hebel angebrachte und perpendicular auf demselben wirkende Kraft und Last im Gleichgewicht sind, so stehen sie mit ihren Abständen von dem Ruhepunkt, oder mit den Hebelsarmen selbst in verkehrter Verhältnis. Der Hebel mag von der ersten zweiten, oder dritten Art sein.

Beweis: Wenn man die an den drei Hebelsarten Fig. 62. angebrachte und perpendicular auf dieselben wirkende 63 u. 64. Kraft B als eine Last oder Gewicht betrachtet, und mit M, die wirkliche Last A aber mit m. benennet, und sich vorstellt, daß, wenn der Hebel um seinen
 Ruhe-

Ruhepunkt bewegt würde, die Kraft B in der nehmlichen Zeit den Bogen BD beschreiben müste, als die Last den Bogen AE beschriebe. Derwegen kan man diese verschiedene Geschwindigkeiten der Kraft und Last durch die Bögen BD und AE nach §. 27, oder auch, weil der Winkel $BCD = ACE$, folglich die Bögen BD und AE einander ähnlich sind, durch die Radien oder Abstände BC und AC ausdrücken. Nun aber ist das Bemühen der Kraft und Last nach der Bedingung gleich. D. i. $M \times BC = m \times AC$. Also wenn man diese Gleichung in eine Proportion auflöset, so ist $M : m = AC : BC$, §. 30. - D. i. wenn die Kraft und Last im Gleichgewicht sind, so stehen sie mit ihren Abständen von dem Ruhepunkt in verkehrter Verhältniß.

Z u s a z.

§. 217. Wenn also umgekehrt die Abstände mit der Kraft und Last in verkehrter Verhältniß stehen, so sind Kraft und Last im Gleichgewichte.

Z u s a z.

§. 218. Wenn demnach aus obiger Proportion $M : m = AC : BC$, was immer für drei Sätze bekannt sind, so kan man leicht den vierten finden, oder auch wenn die Kraft und Last samt ihrer Entfernung von einander gegeben sind, so kan man nach §. 182. den Ruhepunkt C finden, in welchen, wenn der Hebel aufgehangen oder unterstützt wird, beide im Gleichgewichte stehen. D. i. man kan allezeit die Kraft finden, welche nöthig ist, einen an einem gewissen Hebel angebrachten Last das Gleichgewicht zu halten, oder umgekehrt.

Z u s a z.

§. 219. Da die Abstände der Kraft und Last von dem Ruhepunkt Radien der ähnlichen Bögen BD und AE welche die Kraft und Last in gleicher Zeit beschreiben, sind, und sich die ähnliche Bögen wie ihre Radien verhalten §. 148. Geomet. so kan man nach vorhergehenden Lehrsat auch sagen, daß sich an einem jeden Hebel die Kraft zu der mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last wie der Bogen welchen die Last beschreibt, zu den Bogen welchen die Kraft beschreibt, verhalte. Da ferner durch diese Bögen die Geschwindigkeiten der Kraft und Last ausgedrückt werden, so folget auch, daß sich die Kraft und Last wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten verhalten.

Z u s a z.

§. 220. Aus allen diesen erhellet, daß man durch einen Hebel der ersten und zweiten Art mit einer kleinern Kraft eine grössere Last bewegen könne, wenn man nemlich die erste weiter vom Ruhepunkt als die andere anbringt. Bei der dritten Art aber mus die Kraft allezeit grösser als die Last sein, weil sie vermög der Eigenschaft dieses Hebels allemal näher am Ruhepunkt als die Last sein mus. Unterdessen, obwohl man bei diesem Hebel nichts an der Kraft gewinnt, so kan er doch in gewissen Fällen mit Nutzen gebraucht werden. Z. B. wenn man überflüssige Kraft hat, und nur an der Zeit gewinnen will, oder wenn man ausdrücklich an Ort und Stelle gebunden ist. u. d. gl. m.

Z u s a z.

§. 221. Hätte aber der Hebel eine Schwere, und dessen Arme wären ungleich lang, so würde der §. 216. erwiesene Lehrsat nicht mehr stat haben, bis nicht die

ungleiche Schwere der Hebelsarme als eine noch besonders hinzukommende Kraft und Last mit in die Betrachtung genommen wird, welches am süglichsten geschieht, wenn man die ungleiche Schwere der Arme durch Anhängung eines Gewichtes zuvor in das Gleichgewicht zubringen sucht, und alsdenn dasselbe mit in die Rechnung nimmt.

Z u s a z.

§. 222. Ferner ist klar, daß wenn eine geringere Kraft einer größern Last an einem Hebel das Gleichgewicht halten soll, die erstere allemal um so weiter von dem Ruhepunkt angebracht werden müsse, als sie kleiner als die andere ist.

Z u s a z.

§. 223. Wenn die Last schneller als die Kraft bewegt werden soll, so mus die erstere weiter von dem Ruhepunkt entfernt sein als die andere, diese aber mehr Vermögen haben, oder umgekehrt.

Ubrigens erhellet von selbst, daß die Schall oder Schnelwagen, Scheeren, Zangen, Schneidmesser u. m. d. gl. nichts anders als verschiedene Hebelsarten sind, deren Arme nach Erfordernis bald länger bald kürzer gemacht werden. Besonders werden den Anfängern die nähere Beschaffenheit der erstern, und die Untersuchung ihrer Fehler werththätig gezeigt werden.

L e h r s a z.

§. 224. Wenn die Kraft und Last an einem Hebel der ersten Art im Gleichgewichte sind, und schief in ihn wirken, so verhält sich ebenfalls die erste zur
an-

ändern wie umgekehrt ihre Abstände von dem Ruhepunkt, und umgekehrt.

Beweis: Verlängert die schiefen Richtungslinien, Fig. 67. 68. FB und EA bis sie in einen Punkt D zusammen laufen; ziehet durch C und D eine gerade Linie DG, und aus einen auf der Linie DE beliebigen Punkt A eine Parallel AG zu DB; vollendet das Parallelogram DAGI gänzlich, indem ihr noch aus dem Durchschnittspunkt G eine Parallel GI zu DA führet, und betrachtet dabei, daß, weil die Kraft nach der Richtung DB, die Last aber nach DA würfet, und der Ruhepunkt C diesen beiden nach der Richtung CD ebenso viel widerstehet, als beide zusammen würden, man diese drei Kräfte durch die Seiten des Parallelograms und zwar die eigentliche Kraft durch DI, die Last durch DA, und den Widerstand, welchen der Ruhepunkt leistet, durch die Diagonal DG vorstellen, und folglich DI und DA als zwei zusammengesetzte Kräften, welchen die einfache DC gleich ist, ansehen könne. Nun aber verhält sich bei zusammengesetzten Kräften jede einfache zu der andern wie die Sinusse der Winkel, so sie mit der Diagonal machen wechselweis S. 41. D. I. wenn man DC als den Sinus totus annimmt, und Cb auf DB, Ca aber auf DA perpendicular führet, so sind sie die Sinusse der Winkel BDC und ADC und es ist

$$DI : DA = Ca : Cb.$$

Cb und Ca aber sind zugleich die Abstände der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkt, also wenn die Kraft und Last an einen Hebel der ersten Art im Gleichgewicht und ihre Wirkungen schief sind, so verhalten sie sich wie ihre Abstände von dem Ruhepunkt wechselweis, und umgekehrt.

Z u s a z.

Fig. 69. §. 225. Eben was wir in vorigen Lehrsatze von 70. dem Hebel der ersten Art erwiesen haben, hat nicht weniger seine Beziehung auf den Hebel der zweiten und dritten Art; denn, wenn man mit den drei Kräften das Parallelogram DCGI sich wieder vorstellt, und die Perpendikularen Cb und Ca auf DB und DA zieht, welche zugleich die Sinusse der Winkel BDC und GDC sind, so ist abermal die Kraft B zur Last A wie wechselseitig Ca zu Cb.

Z u s a z.

Fig. 71. §. 226. Wären die Richtungen BF und AE der Kraft und Last zwar schief, aber unter sich parallel, so hat man sich den Punkt ihres Zusammenlaufes unendlich weit entfernt, und folglich die Winkel an denselben davon Ca und Cb die Sinusse vorstellen, als unendlich klein einzubilden. Derwegen ist nicht minder im solchen Falle die Kraft B zur Last A, wie umgekehrt Ca zu Cb.

Z u s a z.

§. 227. Man kan also von allen Hebelsarten, sie mögen gerade oder krum sein, und die Kraft und Last mag schief oder perpendikular in denselben wirken, überhaupt sagen, daß, wenn die Kraft und Last einander das Gleichgewicht halten sollen, sich dieselben wechselseitig wie die perpendikular Abstände der Richtungslinien von dem Ruhepunkt verhalten müssen.

Ubrigens ist aus den bisher angeführten leicht einzusehen, daß, wenn die Richtungen der Kraft und Last schief sind, dieselben ihr wirkliches Vermögen um so weniger ausüben können, je schiefere
sic

ke sind. Wenn man also durch was immer für einen Hebel mit einer möglichst kleinen Kraft eine Last bewegen sol, so hat man zu sorgen, daß dieselbe soviel möglich perpendicular in den Hebel wirken könne.

Von dem Rad an der Welle.

Erklärung.

§. 228. Wenn sich eine Kraft in einem Kreis bewegt, und einen Cylinder, daran die Last angebracht ist, mit sich herum drähet, so wird diese Maschine ein Rad an der Welle (*Axis in peritrochio*) genent.

Z u s a z.

§. 229. Der Cylinder an welchen die Last angebracht, oder gemeiniglich an einen Stricke aufgewunden wird, heist die Welle, und iene Punkten O, P, in welchen die Welle auflieget, und sich daran herumdrähet, werden die Lagerzapfen genent. Die gerade Linie OP aber, welche sie durch die Länge des Cylinders verbindet, ist die Achse. Fig. 72.

Z u s a z.

§. 230. Die Kraft wird entweder an einige durch die Welle gesteckte Sprossen CI, IF als Radian, oder an eine so genante Kurbel DE, oder aber an dem Umkreise eines wirklichen Rades verschiedentlich angebracht.

Lehrsatz.

§. 231. Wenn an einem Rad an der Welle die Kraft und Last im Gleichgewicht stehen solle, so müssen sie sich gegeneinander wie umgekehrt der Radius der Welle zum Radius des Rades verhalten.

Fig. 73. Beweis: Verlängert die Richtungslinien EB und FA der Kraft und Last, bis sie, wenn sie nicht parallel sind, in einen Punkt D zusammenlaufen; ziehet aus dem Lagerzapfen oder Ruhepunkt C die Perpendicularen CB und CA auf die Richtungen, so sind sie die Abstände der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkt §. 214. oder man kan sie als die Arme eines Hebels ansehen. Und derowegen ist:

$$B : A = AC : BC.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie umgekehrt der Radius der Welle zum Radius des Rades.

Z u s a z.

§. 232. Es wird in vorigen Lehrsatz eigentlich erfordert, daß die Richtung EB der Kraft eine Tangent zum Umkreis des Rades sei; denn widrigenfalls, d. i. wenn sie z. B. nach BL gerichtet wäre, so würde der Abstand der Kraft nicht CB sondern vielmehr CL sein, und man würde sehen müssen:

$$B : A = AC : CL.$$

D. i. der Radius des Rades würde kürzer werden, oder die Kraft im solchen Falle nicht ihr ganzes Vermögen in die Last ausüben können, ia sie würde dasselbe gänzlich verlieren, wenn sie nach der Richtung OC oder PO wirken müßte. Es ereignet sich dieses sonderlich öfters bei Kurbeln, wenn an denselben der Kraft keine gute Richtung gegeben wird.

Z u s a z.

§. 233. Weil die Abstände der Kraft und Last eigentlich Radien des Rades und der Welle sind, wenn anders die Richtungen Tangenten sind, und die Radien sich wie ihre Umkreise verhalten, also verhält sich auch an dem Rad an der Welle die Kraft zur Last, wie der Umkreis der Welle zum Umkreise des Rades.

Zu

Z u s a z.

§. 234. Man kan also das Rad an der Welle mit Recht als einen ewigen Hebel ansehen, und zwar als einen Hebel der ersten Art, wenn die Kraft und Last sich auf beiden Seiten des Ruhepunkts befinden, und als einen der zwoten, wenn sowohl Kraft als Last nur auf einer Seite desselben wirken.

Ubrigens ist das Rad an der Welle vorzüglich zu gebrauchen, wenn grosse Lüste auf grössere Höhen aufgezogen, oder auf horizontalen oder schiefen Flächen herbei gebracht werden sollen, oder wenn immer ein oftmaliges Umdrähen an einer Maschine erfordert wird. Die Welle wird hiebei nach Erfordernis der Umstände bald horizontal, bald vertikal gestellet. Im ersten Falle wird sie überhaupt ein Saspel, im andern aber ein Brustzug genent. Eben so sind Zähräder, Tretträder, Wasserräder, oder wenn man Pferde um eine Welle zu treiben im Zirkel herum gehen läst, unter eben diese Gattung Maschinen zu zählen, oder als Räder an der Welle anzusehen.

Von der Flaschenscheibe.

§. 235. Wenn eine Scheibe durch einen an ihrem Umkreis in einer ausgehöhlten Ruth hinlaufenden Strick oder Schnur um ihren Mittelpunkt bewegt wird, so heist sie eine Flaschenscheibe.

Z u s a z.

§. 236. Verbleibt der Mittelpunkt der Scheibe beim Umdrähen immer an seinen nehmlichen Orte stehen, so ist es eine unbewegliche; verändert aber derselbe

selbe seine Stelle, und bewegt sich zugleich mit der angehangenen Last, so wird sie eine bewegliche Flaschenscheibe genent.

Z u s a z.

§. 237. Oefters wird die Flaschenscheibe in ihren Mittelpunkte mit einem runden Loche versehen, durch welches eine Achse gesteckt wird, um die sie sich ungehindert bewegen kan; öfters aber wird auch die Achse an die Flaschenscheiben selbst fest gemacht, und bewegt sich mit samt derselben in runden Löchern, welche ihr zur Auflage dienen.

Lehrsatz.

§. 238. In der unbeweglichen Flaschenscheibe mus die Kraft soviel Vermögen als die Last haben, wenn sie ihr das Gleichgewicht halten soll.

Fig. 74. Beweis: Wenn über eine unbewegliche Flaschenscheibe einen Strick oder Schnur gelegt, und an dessen einem Ende P eine Last, an das andere Q aber eine Kraft angebracht wird, so kan man BA als einen Hebel der ersten Art, dessen Ruhepunkt in C, die Last in A und die Kraft in B ist betrachten. Nun aber sind die Abstände BC und AC der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkte Radien der Flaschenscheibe, derowegen ist $Q : P = CA : CB$. §. 224. Weil aber $CA = CB$ so ist nothwendig auch $Q = P$. D. i. in der beweglichen Flaschenscheibe mus das Vermögen der Kraft und Last gleich sein, wenn sie im Gleichgewicht stehen sollen.

Z u s a z.

Fig. 75. §. 239. Wenn auch die Richtungslinien QD und PD der Kraft und Last nicht parallel laufen, so verblei-

bleiben die perpendicular Abstände CB und CA der Kraft und Last doch immer den Radien der Scheibe und also auch unter sich gleich; folglich muß die Kraft an einer unbeweglichen Flaschenscheibe auch bei schiefen Richtungen eben so viel Vermögen als die Last haben, um ihr das Gleichgewicht zu halten.

Z u s a z.

§. 240. Nicht weniger folget, daß die Kraft und Last an einer unbeweglichen Flaschenscheiben gleiche Räume durchlaufen, folglich gleiche Geschwindigkeiten haben.

Z u s a z.

§. 241. Es wird also bei einer unbeweglichen Flaschenscheiben an der Kraft eigentlich nichts gewonnen; jedoch giebt sie den öfters sehr wesentlichen Vorteil, daß man die Richtungen sowohl der Kraft als der Last nach Belieben verändern könne.

L e h r s a z.

§. 242. Wenn die Kraft und Last an einer beweglichen Flaschenscheibe im Gleichgewichte stehen sollen, so müssen sie sich wie umgekehrt die perpendicular Abstände ihrer Richtungslinien von dem Ruhepunkt verhalten.

Beweis: Wenn man das Ende eines Strickes oder einer Schnure an einen unbeweglichen Punkt T befestiget, denselben um eine bewegliche Flaschenscheiben, an welche eine Last P angebracht ist, leget; an das andere Ende Q aber eine Kraft anwendet, welche die Last samt der Flaschenscheibe durch die Anspannung des Strickes zu bewegen sucht, so kan man die Linie BC, so durch die Punkten B und C, in welchen die Richtungen
 Unterb. Mechanik. III. Th. M tungen

tungslinien PQ und PT sich als Tangenten von der Flaschenscheibe entfernen, als einen Hebel der zweiten Art, an dem C der Ruhepunkt, L der Ort der Last, und B der Kraft ist, ansehen. Zieht man nun CE perpendicular auf QP, und CL auf GP, als auf die Richtungslinien der Kraft und Last,

so ist $Q : P = CL : CE$. §. 216.

D. i. wenn die Kraft und Last an einer beweglichen Flaschenscheiben im Gleichgewicht sein sol, so müssen sie sich wie umgekehrt die perpendicular Abstände ihrer Richtungslinien von dem Ruhepunkt verhalten.

Z u s a z.

§. 243. Zieht man noch die Linie BG und CG nach dem Mittelpunkt der Flaschenscheiben, so ist das Dreieck $BLG = CLG$, weil BG und CG Radien, und ihre Winkel in L $= 90^\circ$ sind. Da ferner GB und CE perpendicular auf QP stehen, so sind sie unter sich parallel, und der Winkel GBL ist $= BCE$, weil ferner der Winkel $BLG = BEC = 90^\circ$ ist, so sind die zwei Dreiecke BEC und BLG oder auch CLG einander ähnlich, und derowegen ist:

BL oder $CL : CE = BG$ oder $CG : BC$.

Weil aber gleich oben erwiesen worden; daß $Q : P = CL : CE$, so ist auch $Q : P = BG$ oder $CG : BC$.

D. i. an einer beweglichen Flaschenscheiben verhält sich auch die Kraft zur Last, wie der Radius der Scheibe zur Sehne, die von einem Berührungspunkt der Richtungslinien zum andern gezogen wird.

Z u s a z.

Fig. 77. §. 244. Sind die Richtungslinien BQ und LP der Kraft und Last unter sich parallel, so wird BC nothwendig dem Durchmesser, und CL dem Radius der Schei-

Scheibe selbst gleich, und es ist abermal $Q : P = CL : BC$. D. i. Wenn in einer beweglichen Flaschenscheiben die Richtungen der Kraft und Last parallel sind, so mus sich die Kraft zur Last wie 1 : 2 verhalten, wenn sie im Gleichgewicht stehen sollen. Daraus ist also zu schliessen, daß man an einer beweglichen Flaschenscheiben am meisten an der Kraft gewinnt, wenn man die Richtungen der Kraft und Last parallel einrichtet.

Z u s a z.

§. 245. Ferner folget nicht minder, daß so wie man bei der beweglichen Flaschenscheiben an der Kraft gewinnt, dieselbe auch eine um so grössere Geschwindigkeit als die Last haben müsse, d. i. bei schiefen Richtungen verhält sich die Geschwindigkeit der Kraft zu den der Last, wie $BC : CG$ oder wie die Sehne zum Radius, und bei parallelen wie der Durchmesser des Scheibe zu ihren Radius.

Von der schiefliegenden Fläche.

Lehrsatz.

§. 246. Wenn eine Last P durch eine Kraft Q auf Fig. 78. einer schiefliegenden Fläche EG gehalten werden, oder mit ihr im Gleichgewicht stehen sol, und die Richtung AH der Kraft ist mit der schiefliegenden Fläche parallel, so mus sich die Kraft zur Last wie die Höhe FG der schiefliegenden Fläche zu ihrer Länge EG verhalten.

Beweis: Ziehst aus dem Schwerpunkt A der Last die Linie AC perpendicular auf EG , so wird C der Ruhepunkt sein, in welchem die Last die schiefe Fläche berührt.

berührt, oder aufruhet, und AC ist der Abstand der Richtungslinie AH der Kraft von dem Ruhepunkt. Lasset ferner aus A eine Perpendikular AI auf die Horizontale Grundfläche EF fallen, so wird dieselbe die Richtung der Last anzeigen, nach welcher sie vermög ihrer Schwere frei fallen würde. Ziehet ihr nun noch DC perpendicular auf AI , so wird solche auch den Abstand der Richtungslinie der Last von dem Ruhepunkt anzeigen, und ihr werdet DC und AC als die Arme eines gebrochenen Hebels, an dessen einen Ende D die Last, und an dem andern A die Kraft angebracht, C aber der Ruhepunkt desselben ist, ansehen können, und in diesen ist nun $Q : P = DC : AC$.

§. 224. Da nun das Dreieck ABC rechtwinklicht, und DC perpendicular auf dessen Hypothenuse AB gemacht worden ist, so sind die zwei Dreiecke ADC und CDB einander ähnlich §. 152. Geomet. und weil der Winkel $DBC = EBI$ und $EIB = 90^\circ$, so ist auch das Dreieck EIB oder $EFG \sim ADC$ oder CDB , folglich ist auch: $DC : AC = BI : EB : FG : GE$ und also $Q : P = FG : GE$. D. i. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe der schiefliegenden Fläche zu ihrer Länge.

Z u s a z.

§. 247. Da wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und EFG der Winkel $DAC = GEF$, und man AC als den Sinus totus, DC aber als den Sinus des Winkels DAC ansehen kan, und nach §. 246. $Q : P = DC : AC = FG : EG$ ist, so ist auch $Q : P = \sin DAC$ oder $GEF : \sin tot.$ D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Sinus des Erhöhungswinkel der schiefliegenden Fläche zum Sinus totus.

Zus

Z u s a z.

§. 248. Ist die Richtung AH der Kraft nicht mit der schiefen Fläche EG sondern mit ihrer Grundfläche EF parallel, so zieht abermal DC perpendicular auf die Richtungslinie AI, der Last, und CX perpendicular auf die Richtungslinie AH der Kraft, so ist wiederum:

$$Q : P = DC : CX. \text{ §. 224.}$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Abstand der Richtungslinie der Last zum Abstand der Richtungslinie der Kraft von dem Ruhepunkt. Weil ferner $AD = CX$, so ist auch $Q : P = DC : AD$ und da die Dreiecke ADC und EFG ebenfalls einander ähnlich sind, so ist auch:

$$Q : P = FG : EF.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefliegenden Fläche zu ihrer horizontalen Grundlinie.

Z u s a z.

§. 249. Siehet man EF als den Sinus totus an, so ist FG die Tangent des Winkels E, und man kan sagen, daß wenn eine Last auf einer schiefliegenden Fläche durch eine Kraft, deren Richtung mit der horizontalen Grundfläche EF parallel ist, im Gleichgewicht gehalten werden sol, sich die Kraft zur Last wie die Tangent des Winkels der schiefen Fläche zum Sinus totus verhalten müsse.

Z u s a z.

§. 250. Machet die Richtungslinie OH der Kraft mit der schiefen Fläche entweder auf oder abwärts einen Winkel wie HOE oder HOG, so zieht abermal DC und CX perpendicular auf die Richtungslinien AI und

M 3

OH

Fig. 79.

u. 81.

Fig. 80.

OH der Last und Kraft, so ist wiederum $Q : P = DC : CX$. §. 224. Da ferner das Dreieck ACO rechtwinklig ist, so ist der Winkel CAO das Complement von dem Winkel AOC, dessen Sinus aber CX, und DC ist der Sinus des Winkels DAC = CEI, von beiden aber AC der Sinus totus, folglich ist auch $Q : P = \sin CEI : \cosinus$ des Winkels COA. D. i. wenn eine Kraft und Last auf einer schief liegenden Fläche einander das Gleichgewicht halten sollen, und die Richtungslinie der Kraft macht mit der schiefen Fläche einen Winkel auf oder abwärts, so mus sich die Kraft zur Last wie der Sinus des Winkels der schiefen Fläche zum Cosinus des Winkels, den die Richtungslinie der Kraft mit der schiefen Fläche machet, verhalten.

Z u s a z.

§. 251. Aus dem vorhergehenden Lehrsatze und daraus gezogenen Zusätzen folgt also, daß eine Last auf einer nehmlichen schief liegenden Fläche durch eine Kraft, deren Richtung mit der schiefen Fläche parallel läuft, am leichtesten im Gleichgewicht erhalten werde; oder daß bei ieder andern Richtung als der besagten eine grössere Kraft erfordert werde, um die Last im Gleichgewicht zu erhalten.

Wenn demnach ein Lastwagen durch Pferde über einen Berg gezogen werden soll, so werden dieselben die wenigste Kraft anzuwenden haben, wenn sie dergestalt angespannet werden, daß die Zugstränge mit der schiefen Fläche des Bergs parallel laufen.

Obwohl man in den Figuren zur Erweisung des Gleichgewichtes der Kraft und Last auf einer schief-

schiefliegenden Fläche runde oder kugelförmige Körper für die Last angenommen hat, so ist nichts desto weniger das nehmliche auch von Körpern von einer ieden andern Figur zu verstehen. Nur wird eine stärkere Reibung bei denselben, weil sie in mehreren Punkten auf der Fläche aufliegen, entstehen, und daher zur bloßen Erhaltung der Last eine mindere, und zur würtlchen Bewegung eine grössere Kraft erfordert werden. Davon aber das mehrere noch an seinen Orte vorkommen wird.

Von dem Keil.

Erklärung.

§. 252. Ein Körper, der was immer für eine schneidende oder spizige Gestalt hat, und gebraucht wird, zween andere auseinander zu trennen, oder einen allein entzwei zu teilen, zu spalten, zu durchbohren, oder ihn durch Unterschiebung auf eine kleine Höhe zu erheben, wird ein Keil genent.

Unter diese Art einfache Maschinen gehören erstlich alle würtlch so genante Keile, deren man sich insgemein zum Holz oder andere Körper zu spalten bedienet; dann auch noch alle Nägel, Meissel, Pfrieme, Nadeln, Lanzen, Pfeile, Messer, Degen, Säbel, Axen, u. m. d. gl. nicht minder kan man die Gewölbesteine als Keile ansehen, die gegen einander und auf die Wieberlager des Gewölbs drucken.

Man hat schon lange wahrgenommen, daß die Wirkung des Keils nicht in allen Fällen auf einerlei Art betrachtet werden könne. Solche zeigt sich nehmlich anders, wenn der Keil angewendet

wird zween nicht wirklich zusammenhängende Körper auseinander zu treiben, oder einen davon in die Höhe zu heben; und wieder anders, wenn er einen wirklich zusammenhängenden z. B. ein Stückholz zu spalten dienen soll. Allein im letztern Falle ist bisher noch keine ganz genaue Bestimmung von der Grösse der Wirkung des Reiles entdeckt worden, weil es nicht wohl möglich ist, die Stärke des Zusammenhanges eines zu zerspaltenden Körpers in allen Fällen genau zu bestimmen. Indessen werden wir dasienige anführen, was bisher von der Bestimmung der Kräfte des Reiles in beiden Fällen bekannt ist.

Lehrsatz.

Fig. 82. §. 253. Wenn ein Reil ABC zween nicht aneinander hangende Körper E und H auseinander zu treiben angewendet wird, so mus sich die Kraft desselben zum Widerstand, welchen beide Körper gegen ihn ausüben, wie die Grundlinie oder Breite AB des Reils zu seiner Länge DC verhalten; wenn beide einander das Gleichgewicht halten sollen.

Beweis: Zieheth ET und HT durch die Berührungspunkten R und S perpendicular auf AC und BC EH durch die Schwerpunkten beider Körper; und FG durch T, aber beide parallel zu AB, und endlich noch FE und GH parallel zu DC; so kan man TF und TG als den Abstand der Kraft, und FE und GH als den Abstand der Last oder des Widerstands zu beiden Seiten von den Ruhepunkten F und G ansehen, und EFT und HGT als zween gebrochene Hebel betrachten, an welchen die Kraft des Reiles in T, der Widerstand der beiden Körper gegen die Seiten des Reils aber in E und H angebracht wäre. Damit aber
die

die Kraft und Last an einen solchen Hebel im Gleichgewicht stehen, so mus die erste sich zur zweiten wie FF zu FT oder wie HG zu GT verhalten §. 227. Weil aber hier nur eine Kraft in zween Hebel würket, so ist klar, daß sich dieselbe zu beiden Lasten wie $EF + HG$ zu FT oder GT verhalte. Um nun noch zu erweisen, daß auch die Kraft zu beiden Lasten wie AB zu DC ist, so betrachtet, daß die Dreiecke CRT und CDA rechtwinklicht sind, und in C einen gemeinschaftlichen Winkel haben, folglich ist auch der Winkel $CTR = CAD$ §. 140. Geom. und die Dreiecke sind einander ähnlich. Ferner betrachtet, daß, weil das Dreieck ITC rechtwinklicht, und TR perpendicular auf IC ist, die Dreiecke IRT und TRC ähnlich sein müssen, §. 152. Geomet.; daher ist auch der Winkel $ITR = ICT$. Endlich da das Dreiecke EFT rechtwinklicht, und der Winkel $FTE = ACD$ ist, so ist auch der dritte $FET = DAC$, und folglich sind auch die Dreiecke EFT und ADC einander ähnlich, und das nehmliche ist auf der andern Seiten von HGT zu verstehen; derowegen ist:

$$EF : FT = AD : DC$$

oder auch $EF + HG : FT = AD + DB : DC$.

Weil aber gleich oben erwiesen worden, daß die Kraft sich zu beiden Lasten wie $EF + HG$ zu FT verhalte, wenn sie im Gleichgewicht stehen, also ist auch vermög letzterer Proportion klar, daß sich die Kraft eines Keils zur Last, oder dem Widerstand, welchen beide Körper gegen ihn ausüben, wie die Grundlinie oder Breite AB desselben zu seiner Länge DC verhalten müsse.

Z u s a z.

§. 254. Da die Kraft sich zu einer Last, die auf einer schiefliegenden Fläche in einer zur Grundlinie paralle-

rallelen Richtung gehalten wird, wie die Höhe der schief liegenden Fläche zu ihrer horizontalen Länge verhält, so sieht man, daß der Keil in obigen Falle mit derselben gleiche Wirkung habe.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 255. Da durch die Verminderung der Linie AB, indem DC unverändert bleibt, die Verhältniß beider Linien vergrößert wird, so ist klar, daß je schmäller oder vielmehr spitziger man einen Keil macht, je kleiner darf die ihn treibende Kraft sein, um zween Körper auseinander zu treiben.

Die Wirkung des Keiles läßt sich auch durch die Geschwindigkeiten oder durch den Weg, welchen die Kraft und Last beschreiben müssen, erweisen; dann betrachtet, daß beide Körper erstlich bei dem Anfang der Wirkung des Keiles sich berühren, und daß sie am Ende denselben auf eine Weite von einander getrennet werden, die der Breite AB des Keils gleich ist, und daß indessen der Keil einen Weg gemacht hat, der der Linie DC gleich ist. Nun da sich auch die Kraft zur Last wie die Geschwindigkeit der zweiten zu der ersten verhält, so ist klar, daß die Kraft eines Keils sich zu der ihm widerstehenden Last wie AB zu DC verhalte.

L e h r s a t z.

Fig. 83.

§. 256. Wenn ein Keil ABC gebraucht wird, einen Körper z. B. ein Stückholz zu spalten, so muß sich die Kraft, so den Keil treibet, zur Last, oder dem Widerstand, welchen das Holz an beide Seiten des Keils ausübet, wie $AB \times IL$ zu $2AC \times GL$ verhalten, wenn beide im Gleichgewicht stehen sollen.

Vor.

Vorbereitung: Betrachtet, daß, wenn der Keil zum Holz spalten angewendet wird, dasselbe ihm zu beiden Seiten nach den Richtungslinien GE und HE, welche perpendicular auf die Seiten AC und BC sind, widerstehe; und obwohl die Berührung des Keiles und Holzes zu beiden Seiten in mehreren Punkten geschieht, so kan man sich doch einbilden, als ob dieselbe nur in den Punkten G und H vorgienge, und also der ganze Widerstand daselbst allein vereiniget wäre. Ferner, wenn die wirkliche Spaltung nur noch bis in M gienge, so ist doch gewis, daß die Fibern wegen ihrer natürlichen Elasticität noch weiter hinab schon ausgedehnet, obwohl noch nicht von einander getrennet werden, folglich auch schon dem Keil widerstehen. Jedoch erstreckt sich diese Ausdehnung nur bis auf eine gewisse Weite, als etwan bis in L, so daß ML die ganze Anzahl der ausgedehnten Fibern vorstellet; weiter hinab aber wird keine Wirkung des Keiles in die Fibern verspüret. Ob uns zwar die eigentliche Weite ML, auf welche die Fibern die Wirkung des Keiles empfinden, nicht genug bekant, und nach der Beschaffenheit des Holzes sehr verschieden sein kan, so ist doch, um sich der Wahrheit so weit zu nähern, als in diesem Falle möglich ist, erlaubt anzunehmen, als ob zwischen M und L in einen Punkt I ein eben so starkes Band, als der ganze Widerstand der Fibern beträgt, gelegt, und welches durch die Wirkung des Keiles anstaat den ausgedehnten Fibern zu zerreißen wäre. Dieses also vorausgesetzt, ist klar, daß die Kraft des Keiles gegen das Band wie eine Kraft und Last, welche an zween Hebel GIL und HIL, in welchen L ihr gemeinschaftlicher Ruhepunkt, LI der gemeinschaftliche Abstand der Last, und LG und LH die Abstände der Kraft vom Ruhepunkt beider Hebeln ist, wirken müsse.

Be-

Beweis: Zieh OD und OF parallel zu GE und HE , und machet das Parallelogram $ODEF$ vollends aus, so ist klar, daß durch die gleichen Seiten ED und EF der Widerstand des Holzes gegen dem Keil, durch EO aber die Kraft, welche der Keil haben mus, um mit besagten Widerstand im Gleichgewicht zu sein, ausgedrückt werde, oder die Kraft Q des Keils verhält sich zum Widerstand P , welchen das gespaltene Holz gegen die Seiten des Keils ausübet, wie EO zu $DE + EF$. Nicht minder da die noch nicht getrenten Fibern, welche in I vereinigt zu sein angenommen, und durch das Band vorgestellet werden, wie zween Hebel GIL und HIL würden, so ist wiederum: $Q : P = LI : LG$ oder wie $LI : LH$. Ferner betrachte, daß die zwei rechtwinklichte Dreiecke CQA , und CGE einen gemeinschaftlichen Winkel in C haben, folglich ist auch der Winkel $CAQ = CEG$, und die Dreiecke sind einander ähnlich; und weil auch die zwei rechtwinklichte Dreiecke CGE und DNE in E einen gemeinschaftlichen Winkel haben, so ist auch der Winkel $NDE = GCE$, folglich ist auch das Dreieck $DNE \sim CGE \sim CQA$, und da das Dreieck $CQA = CQB$, und $DNE = DNC = FNE = FNC$ ist, so ist auch $ODE = OFE \sim ACB$; daher kan man anstaats der vorigen Proportion setzen: $Q : P = AB : 2AC$; und um den Widerstand, den die noch ungetrenten Fibern gegen den Keil ausüben, ebenfalls mit in die Rechnung zu nehmen, so ist:

$$Q : P = AB \times IL : 2AC \times GL \text{ oder } HL.$$

Ubrigens erhellet von selbst, daß der Keil bei der Anwendung zum spalten eines Körpers eine aus zween schiefliegenden Flächen, und zween Hebeln zusammengesetzte Maschine wird. Wir haben aber diesen Falle von darum hier unter den einfachen

chen Maschinen berührt, um von demselben, da wir von den zusammengesetzten handeln, nicht wieder besonders Meldung machen zu müssen.

Von der Schraube.

Erklärung.

§. 257. Wenn man sich einbildet, daß die Höhe eines Cylinders AD in mehrere gleiche Teile AC, CE, EG u. s. w. eingetheilt sey und auf denselben lauter rechtwinkelige Dreiecke CAB, ECF u. s. w., von welchen jedes einen solchen Teil AC zur Höhe, den Umkreis des Cylinders aber zur Länge AB, oder CF hat, beschrieben, und alle diese Dreiecke dergestalt um den Cylinder gewunden wären, daß die Spitze B in A, F in C, und H in E u. s. w. zu stehen käme, folglich die Hypothenusen dieser Dreiecke zusammen gleichsam eine Linie ausmachten, die allezeit in der nehmlichen Schräge um den Cylinder gehet; ferner nach dieser schrägen Linie eine Nuth wie fig. 85. an dem Cylinder AD zu sehen, dergestalt ausgehölet wäre, daß zwischen zween solchen Nuthen allezeit ein eben so breiter Teil CI als die Nuth selbst ist, vom Cylinder stehen bliebe, so entstehet daraus eine Maschine, die man eine Schraube nennt.

Fig. 84.

Fig. 85.

Z u s a z.

§. 258. Wenn durch einen andern Körper XY ein Loch gebohret wird, welches mit der Dicke QS, den die ausgeholte Nuth noch übrig läßt, gleichen Durchmesser ON hat, und in der Höhle desselben, so wie an der äussern Oberfläche des Cylinders, eine gleiche Nuth ausgehölet wird, damit die Schraube durch dieselbe gedrahet werden könne, so wird dieses die Schraube.

Schraubenmutter genent, und gehöret unmittelbar zur Schraube, wenn sie ihre Wirkung machen sol.

Z u s a z.

§. 259. Die Muth so wohl an der Schraube selbst, als an ihrer Mutter wird überhaupt der Schraubengang oder das Gewinde genent; insbesondere aber heisset dasselbe ein flaches Gewinde: wenn die Muth rechtwinklicht ausgehölet wird, wie in der 85. fig. und ein schneidendes: wenn sie spitzwinklicht oder schneidend wie fig. 86. gemacht wird. Nach gut befinden bekommt sie auch zu Zeiten eine halbrunde Gestalt.

Die Schraube ist, wie bekant, eine sehr nützliche Maschine, und dienet hauptsächlich entweder einen Körper sachte zu bewegen, oder zween zusammen zu pressen. Damit die Schraube bequemer und mit mehr Nachdruck in ihrer Mutter umgedrähret werden möge, bekommt solche einen Kopf mit einem Einschnitt quer durch denselben, um sich beim Umdrähen eines so genanten Schraubenziehers zu bedienen, oder es wird das eine Ende, wie bei A fig. 85. zu sehen, viereckicht gemacht, um an dasselbe einen Schraubenschlüssel AP anlegen zu können, oder man machet durch den Kopf ein Loch, und stecket einen Hebel durch in der nehmlichen Absicht. Nachdem es die Umstände erfordern, wird bald die Schraube umgedrähret, da indessen die Mutter fest bleibet, bald aber fixet die Schraube fest, und die Mutter wird bewegt; welches nicht minder durch einen Schlüssel oder Hebel geschihet.

Lehr.

Lehrsatz.

§. 260. Wenn eine unmittelbar an die Schraube angebrachte Kraft mit einer an eben derselben befindlichen Last im Gleichgewicht stehen sol, so mus sich die erste zur andern wie die Höhe eines Gewindes zum Umkreis des Schraubens verhalten.

Beweis: Betrachtet, daß das Gewinde einer Schraube nichts anders als ein um einen Cylinder gewundene schief liegende Fläche sei, auf welcher die Last P bewegt wird, und wo die Richtung der Kraft Q mit der Grundlinie AB, und die Richtung der Last P mit der Höhe AC parallel ist; derowegen ist: Fig. 84.

$$Q : P = AC : AB. \text{ §. 248.}$$

Es ist klar, daß die Schraube in diesem Falle nur allein als eine einfache Maschine betrachtet werden könne; so bald sie oder die Mutter derselben mittelst eines Schlüssels oder Hebels, o. d. g. bewegt wird, wie fast allemal geschieht, so wird sie eine zusammengesetzte Maschine, und denn hat die Kraft zur Last wieder eine andere Verhältniß, wie aus folgenden erhellet.

Lehrsatz.

§. 261. Wenn eine Schraube oder ihre Mutter mit Hülff eines Schlüssels oder Hebels bewegt wird, und die an demselben angebrachte Kraft Q mit der an der Schraube oder ihrer Mutter befindlichen Last P im Gleichgewicht stehen sol, so mus sich Q und P, wie die Höhe CI eines Gewindes zum Umkreis M, welchen die an dem Hebel AP angebrachte Kraft beim Umdrähen beschreiben mus, verhalten. Fig. 85.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn die Kraft Q unmittelbar an die Schraube angebracht, und der Umkreis des Schraubencylinders $AD = N$ wäre, $Q : P = CI : N$ sein würde; da aber noch der Hebel AP dazu kommt, an welchen E der Ruhepunkt, in A die Last, und in P die Kraft angebracht ist, so ist in Ansehung desselben: $Q : P = AE : AP$ §. 216. und weil sich die Radien zweier Kreise wie ihre Umkreise verhalten, so ist auch:

$$Q : P = N : M$$

$$\text{• und } Q : P = CI \times N : N \times M$$

$$\text{nicht minder } Q : P = \frac{CI \times N}{N} : \frac{N \times M}{N}$$

$$\text{folglich } Q : P = CI : M.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe des Gewindes zum Umkreis, welchen die an dem Schraubenschlüssel oder Hebel angebrachte Kraft beschreibt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 262. Aus obigen Lehrsatze erhellet also, daß je minder die Höhe des Gewindes, und je länger der Hebel oder Schraubenschlüssel ist, um so kleiner auch die Kraft sein darf um mit der Schraube eine Last zu bewegen.

Zweites Hauptstück.

Von zusammengesetzten Maschinen.

Erklärung.

§. 263. Zusammengesetzte Maschinen werden diejenigen genant, welche aus mehreren einfachen dergestalt zu-

Von zusammengesetzten Maschinen. 193

zusammengesetzt sind, daß eine der andern ihre Wirkung mittheilen, oder in Bewegung setzen könne.

Z u s a m m e n s a g.

§. 264. Die Maschinen sind entweder aus lauter einfachen von gleicher Art, d. i. entweder aus lauter Hebeln, lauter Flaschenscheiben, lauter Schrauben u. s. w. zusammengesetzt, oder sie bestehen aus einfachen Maschinen von verschiedener Art, z. B. aus Hebeln, aus Flaschenscheiben, aus Rädern u. s. w.

Da die Zusammensetzung der einfachen Maschinen sich sehr oft verändern läßt, so entstehen auch sehr vielerlei Gattungen von zusammengesetzten Maschinen; es würde aber viel zu weitläufig sein, sie hier auch nur größten Theils anzuführen, wir werden vielmehr in der Folge nur von jenen handeln, welche die bekanntesten und üblichsten sind, und auf welche sich die übrigen hauptsächlich beziehen. Wer von mehrerer Verschiedenheit der zusammengesetzten Maschinen Nachricht haben will, der mag Lépold's Theatrum Machinarum u. a. m. nachschlagen.

Von zusammengesetzten Hebeln.

L e h r s a g.

§. 265. Wenn mehrere Hebel dergestalt zusammengesetzt sind, daß einer in den andern wirken kan, so verhält sich die an dem ersten angebrachte Kraft zu der an dem letzten befindlichen und mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last wie das Produkt aus den einzelnen Hebelsarmen, oder Abständen der Last vom Ruhepunkt zum Produkt aus den einzelnen Hebelsarmen oder

Abständen der Kraft vom Ruhepunkt. Oder die an zusammengesetzten Hebeln angebrachte Kraft steht mit der ihr das Gleichgewicht haltenden Last in zusammengesetzter umgekehrter Verhältniß, welche aus den einzelnen Verhältnissen der Hebelsarme oder Abstände besteht.

Fig. 87. Beweis: Betrachtet, daß in jeden einzelnen Hebel die Kraft zur Last, wie umgekehrt die Hebelsarme oder die Abstände derselben von dem Ruhepunkt sich verhalten §. 216. so daß in den Hebeln AC, DF und GI, und zwar in dem ersten $BC : AB = P' : Q'$
 zweiten $EF : ED = P'' : Q''$
 dritten $HI : HG = P''' : Q'''$

ferner betrachtet, daß die Ursache der Wirkung des zweiten Hebels die Wirkung des ersten sei; oder daß eigentlich die Last Q' , welche der Kraft P' im ersten Hebel das Gleichgewicht hält, im zweiten die Kraft P'' wird, welche der Last Q'' das Gleichgewicht hält.

Da nun die Wirkung des ersten Hebels $= \frac{AB \times P'}{BC}$

$= Q'$ ist, so können wir diesen gleichen Wehrt in der Proportion des zweiten Hebels anstatt der Kraft P'' setzen, so ist alsdann

$$EF : ED = \frac{AB \times P'}{BC} : Q''$$

und die Wirkung des Hebels ist folglich

$$\frac{AB \times P' \times ED}{BC \times EF} = Q''.$$

Da ferner die Ursache der Wirkung in den dritten Hebel ebenfalls wieder die Wirkung des zweiten Hebels ist; oder da die Last Q'' , welche der Kraft P'' das Gleichgewicht im zweiten Hebel hält, im dritten eigentlich die Kraft P''' wird, welche die Last Q''' im Gleich-

Gleichgewicht hält, so kan man in der Proportion des dritten Hebels anstaats P''' die Wirkung des zweiten Hebels setzen, so ist:

$$HI : HG = \frac{AB \times P' \times ED}{BC \times EF} : Q'''$$

und die Wirkung in diesem Hebel ist folglich:

$$\frac{AB \times P' \times ED \times HG}{BC \times EF \times HI} = Q''.$$

Löst man nun diese Gleichung in folgende Proportion auf:

$$P' : Q''' = BC \times EF \times HI : AB \times ED \times HG$$

so siehet man klar, daß in den drei zusammengesetzten Hebel die an dem ersten angebrachte Kraft P' sich zu der an dem dritten befindlichen Last Q''' in zusammengesetzter und umgekehrter Verhältniß der Abstände der Kraft und Last von dem Ruhepunkt in ieden einzelnen Hebel befinde.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 266. Wenn auch die zusammengesetzten Hebel von verschiedener Art sind, so ist doch aus den vorigen Grunde die am ersten angebrachte Kraft P' zu der an dem letzten befindlichen Last Q''' in zusammengesetzter umgekehrter Verhältniß der Abstände der Kraft und Last an ieden einzelnen Hebel, denn wenn z. B. der erste Hebel AC von der ersten, die andern zweien DE und GI von der zweiten Art wären, so ist das Verhältniß der Kraft zur Last

$$\text{im ersten } CB : AB = P' : Q'$$

$$\text{zweiten } EF : FD = P'' : Q''$$

$$\text{dritten } HI : IG = P''' : Q'''$$

die Wirkung des ersten ist also $\frac{AB \times P'}{CB} = Q'$

die Wirkung des zweiten $\frac{AB \times P' \times FD}{CB \times EF} = Q''$

und die Wirkung des dritten $\frac{AB \times P' \times FD \times IG}{CB \times EF \times HI} = Q'''$

und wenn man diese Gleichung in eine Proportion auflöst:

$$CB \times EF \times HI : AB \times FD \times IG = P' : Q'''$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 87. §. 267. Da die Bögen CN, FM, LI, AO welche die Kraft und Last in gleicher Zeit an den verschiedenen Hebeln beschreiben, sich wie ihre Radien verhalten §. 148. Geomet. und §. 219., so kan man nach vorigen Lehrsaß auch sagen, daß:

$$CN \times FM \times LI : AO \times CN \times FM = P' : Q'''$$

und lasset man in dem ersten Verhältniß die gleiche Faktoren hinweg, so ist

$$LI : AO = P' : Q'''$$

D. i. in zusammengesetzten Hebeln verhält sich die an dem ersten angebrachte Kraft zu der an dem letzten befindlichen und mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last wie der Weg, welchen die Last in einer gewissen Zeit beschreibet, zu dem Weg, welchen die Kraft in eben dieser Zeit machen müste: oder umgekehrt wie ihre Geschwindigkeiten.

Von dem Flaschenzug.

Erklärung.

§. 268. Wenn mehrere bewegliche und unbewegliche Flaschenscheiben dergestalt zusammengesetzt werden, daß sie durch den um dieselben gewundenen Strick alle zugleich in die Bewegung gebracht werden können, so wird

wird diese Zusammensetzung ein Flaschenzug (Polyspastus) genent.

Da die Zusammensetzung der einzelnen Flaschenscheiben sowohl nach ihrer Anzahl, und Stellung, als auch in Ansehung der Art wie die Stricke um dieselbe gewunden werden, verschieden sein kan, so entstehen dadurch auch verschiedene Arten von Flaschenzügen, wie zum Teil aus den 89, 90, 91, 92 und 93 zu ersehen ist. Die Umstände allein können bestimmen, welche Art man sich in gewissen Fällen bedienen soll.

Lehrsatz.

§. 269. Wenn man einen Strick über eine unbewegliche Flaschenscheiben D, und um eine bewegliche A leget, an einem Ende desselben eine Kraft P anbringt, daß andere aber an einem unbeweglichen Ort E befestiget, dann an den Hacken der Flaschenscheibe A das eine Ende eines andern Strickes befestiget, denselben um eine zweite Flaschenscheibe B leget, und mit dem andern Ende in F befestiget; ferner an dem Hacken der Flaschenscheibe B das eine Ende eines dritten Strickes befestiget, denselben um eine dritte Flaschenscheiben C windet, und mit dem andern Ende in G anbindet, u. s. w. jedoch dergestalt, daß alle Stricke Gg, Fd, Ea und Ib parallel zu stehen kommen; an dem Hacken der letzten Flaschenscheiben aber eine Last Q'' anhanget, so mus sich die Kraft P zur Last Q'' wie das Produkt aller Radien der beweglichen Flaschenscheiben zum Produkt aller ihrer Durchmesser verhalten, wenn sie mit einander im Gleichgewicht stehen sollen.

Fig. 89.

Beweis: Betrachtet, daß wenn an einer beweglichen Flaschenscheibe die Stricke mit einander parallel laufen, sich die Kraft zur Last wie der Radius der Flaschenscheibe zu seinem Durchmesser verhalte §. 244. und daß die unbeweglichen Flaschenscheiben zur Vermehrung der Kraft nichts beitragen §. 241. derowegen sind die Verhältnisse der Kraft zur Last in den einzelnen Flaschenscheiben, und zwar

$$\text{in A wie } bc : ab = P' : Q'$$

$$\text{in B wie } ef : df = P'' : Q''$$

$$\text{in C wie } hi : gh = P''' : Q'''$$

ferner betrachtet, daß die Wirkung der Flaschenscheibe

$$\text{be A} = \frac{ab \times P'}{bc} = Q' \text{ die Ursache der Wirkung der}$$

zweiten B sei, und dieselbe gleichsam als die Kraft an B angesehen werden könne; derowegen kan man setzen

$$ef : df = \frac{ab \times P'}{bc} : Q''.$$

Ferner da die Wirkung der zweiten Flaschenscheibe

$$B = \frac{ab \times P' \times df}{bc \times ef} = Q'' \text{ ist, und dieselbe als die}$$

Kraft der dritten C anzusehen ist, so ist $hi : gh =$

$$\frac{ab \times P' \times df}{bc \times ef} : Q''', \text{ und folglich ist ihre Wirkung} =$$

$$\frac{ab \times P' \times df \times gh}{bc \times ef \times hi} = Q'''. \text{ Löset man endlich diese}$$

Gleichung in folgende Proportionen auf, so ist:

$$bc \times ef \times hi : ab \times df \times gh = P' : Q'''$$

woraus also erhellet, daß sich die Kraft zur Last wie das Produkt aller Radien zum Produkt aller Durchmesser der beweglichen Flaschenscheiben verhalte.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 270. Da sich in dieser Maschine bei einer beweglichen Flaschenscheibe die Kraft zur Last wie $1 : 2$, bei zweien wie $1 : 4$, bei dreien wie $1 : 8$, und bei vierten wie $1 : 16$, u. s. w. verhält, so ist klar, daß wenn man die Anzahl der anwesenden beweglichen Flaschenscheibe mit n benennet, allezeit die Kraft zur Last wie $1 : 2^n$ sei.

Obwohl diese Maschine das Vermögen der Kraft ungemein vermehret, so ist sie dennoch im Gebrauche selbst zur Aufhebung schwerer Lasten etwas unbequem, und da der Strick Gh die ganze Last allein tragen mus, so würde er, wenn sie sehr gros wäre, auch sehr dick sein müssen, wodurch er aber auch steif und unbiegsam sein würde, als welches überhaupt in allen Arten von Flaschenzügen das Vermögen der Kraft sehr verringert. Folgende Arten von Flaschenzügen vermehren zwar das Vermögen der Kraft bei einer gleichen Anzahl Scheiben nicht soviel wie die vorige, sie sind aber im Gebrauche bequemer und daher viel mehr üblich. Ihre Zusammensetzung ist folgende:

Nämlich es werden sowohl die beweglichen als unbeweglichen Scheiben in die so genannten Flaschen, die von Eisen oder Metal sind, entweder übereinander wie fig. 90 und 91, oder neben einander wie fig. 92. dergestalt eingesetzt, daß sich jede um ihre besondere Achse drehen kan; oder sie kommen neben einander zu stehen, und haben unten und oben, oder in einer jeden Flasche nur eine gemeinschaftliche Achse wie fig. 93. AB , und CD . Um alle diese Flaschenscheiben wird ein Strick gewunden, wie aus den Figuren erhellet,

an dessen einem Ende die Kraft P angebracht, das andere S aber wird entweder an die obere unbewegliche Flaschen wie fig. 90 und 92, oder an die untere bewegliche wie fig. 91. befestiget, und nachdem es die Umstände erfordern, kan die Kraft so gerichtet werden, daß sie entweder von oben herab wie fig. 90., oder von unten hinauf wie fig. 91. ziehet.

Die Flaschenscheiben selbst werden meistens von Metal verfertigt, und in den zwei Arten fig. 90 und 91 werden von den unbeweglichen die untern, von den beweglichen aber die obern in ihren Durchmessern immer etwas kleiner gemacht, damit die Stricke nebeneinander ungehindert vorbei können. Obwohl zwar durch diese Einrichtung die Stricke unter einander nicht gänzlich parallel werden, und folglich die beweglichen Flaschenscheiben die Kraft nicht vollkommen so vermehren können, S. 243. so siehet man doch in der Ausübung nicht soviel darauf, weil es eben nicht sehr viel beträgt. In der Art fig. 92 und 93, können alle Flaschenscheiben gleiche Durchmesser haben, und die Stricke dennoch parallel geführt werden. Endlich wird die Last Q in allen diesen Arten Flaschenzügen unten an die bewegliche Flaschen gehangen.

Lehrsatz.

Fig. 90. §. 271. Wenn an einem Flaschenzug der Strick bergestalt umgewunden wird, daß an einem Ende desselben die Kraft angebracht, daß andere aber an der unbeweglichen Flaschenfest gemacht wird, und die Stricke machen mit der Linie, welche die Mittelpunkten der beweglichen Flaschenscheiben beschreiben, beiderseits gleiche Winkel, so verhält sich die Kraft zu der mit ihr
im

im Gleichgewicht stehenden Last, wie 1 zu der Summe der Sehnens iener Bögen, welche an den beweglichen Flaschenscheiben von den Stricken umgeben werden, dividirt durch die Radien eben derselben Flaschenscheiben.

Beweis: Betrachtet, daß die unbeweglichen Flaschenscheiben zur Erhaltung der Last eigentlich nichts beitragen, sondern nur dienen dem Strick eine solche Richtung zu geben, daß er nach und nach um mehrere bewegliche Flaschenscheiben gewunden werden kan, und daß alle Teile, welche jede der beweglichen Flaschenscheiben von der ganzen Last Q zu tragen hat, zusammen genommen, derselben gleich sind, und daß alle Teile der ganzen Kraft P , welche in jede bewegliche Flaschenscheiben würfet, der ganzen Kraft P gleich sei.

Man findet aber die besondere Last, welche eine jede bewegliche Flaschenscheibe zu tragen hat, indem man die besondere Kraft und Last bei der ersten mit p' und q' , bei der zwoten mit p'' und q'' , und bei der dritten mit p''' und q''' benent, und sezet:

$$\text{für die erste } bc : ac = p' : q' = \frac{acp'}{bc}$$

$$\text{für die zwote } ef : df = p'' : q'' = \frac{dfp''}{ef}$$

$$\text{für die dritte } hi : gh = p''' : q''' = \frac{ghp'''}{hi}$$

$$\text{da nun } p' + p'' + p''' = P \text{ und } q' + q'' + q''' = Q$$

$$\text{so ist } Q = \left(\frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{gh}{hi} \right) \times P$$

und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, so ist

$$P : Q = 1 : \frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{gh}{hi}.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie 1 zur Summe der Sehnen iener Bögen, die an den beweglichen Flaschenscheiben von den Stricken umgeben werden, dividirt durch ihre Radien.

Z u s a z.

Fig. 92: §. 272. Sind die Stricke, welche um die beweglichen Flaschenscheiben gehen, und von der Last angezogen werden, alle untereinander parallel, so werden die Sehnen der Bögen, welche von den Stricken umgeben werden, den Durchmessern selbst gleich, derowegen verhält sich in einer jeden, die Kraft zur Last, wie der Radius zum Durchmesser. D. i. :

$$\text{in der ersten } bc : 2bc = p' : q'$$

$$\text{in der zwoten } ef : 2ef = p'' : q''$$

$$\text{in der dritten } hi : 2hi = p''' : q'''$$

und wann die Division wirklich verrichtet, wird

$$\frac{2bc}{bc} = \frac{q'}{p'}, \quad \frac{2ef}{ef} = \frac{q''}{p''}, \quad \frac{2hi}{hi} = \frac{q'''}{p'''}$$

$$\text{oder } 2 = \frac{q'}{p'}, \quad 2 = \frac{q''}{p''}, \quad 2 = \frac{q'''}{p'''}$$

$$\text{d. i. } 2 + 2 + 2 = 6 = \frac{Q}{P}$$

$$\text{und also } P : Q = 1 : 6.$$

Daraus erhellet, daß in solchen Falle die Kraft zur Last, wie 1 zur doppelten Anzahl der beweglichen Flaschenscheiben, oder wie 1 zur Anzahl der durch die beweglichen Flaschenscheiben angespannten Stricken sich verhalte.

Überhaupt werden meistens die Stricke in den Flaschenzügen, wenn sie auch nicht vollkommen parallel sind, dennoch dafür angenommen, und das Verhältniß der Kraft und Last diesem Zusatz

zu Folge gesucht, weil man viel kürzer davon kommt, und der sich daher ergebende Unterschied nicht sehr viel beträgt.

Lehrsatz.

§. 273. Wenn an einem Flaschenzug der Strick der Fig. 91. gestalt aufgewunden wird, daß an einem Ende desselben die Kraft angebracht, daß andere aber an der beweglichen Flasche fest gemacht ist, und die Stricke machen mit den Linien welche der Mittelpunkt der beweglichen Flaschenscheiben beschreiben, beiderseits gleiche Winkel, so verhält sich die Kraft zu der mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last, wie 1 zu der Summe der Sehnen iener Bögen, welche an den beweglichen Flaschenscheiben von den Stricken umgeben werden, dividirt durch ihre Radien, und zu der halben Sehne des Bogens, den der Strick an der untersten unbeweglichen Flaschenscheibe C umgiebt, dividiret durch ihren Radius.

Beweis: Betrachtet, daß die Last Q in diesem Falle nicht allein von den um die beweglichen Flaschenscheiben gewundenen Stricken rd, Pf, uc, la, sondern auch ein Teil derselben von dem Strick mS getragen werde. Wenn man also sich einbildet, als ob an al ein Teil p''' der ganzen Kraft P von l gegen a zöge, und mit einem an mS angebrachten Teil q''' der ganzen Last Q im Gleichgewicht wäre, so wird sowohl p''' als q''' nur die Hälfte von derjenigen Last sein, mit welcher die Scheibe C gedrückt wird, und man findet dieselbe, wenn man setzt:

$$ln : lm = p''' : \frac{lm p'''}{ln}$$

folglich ist der halbe Teil davon oder die Last $q''' = \frac{1}{2} l m p'''$

$$\frac{\frac{1}{2}lmp'''}{ln} = \frac{mop'''}{ln} \text{ welche der Strick } mS \text{ zu tragen}$$

hat. Betrachtet ferner, daß die beweglichen Flaschenscheiben hier eben so würden, wie in dem vorigen Lehrsaß erwiesen worden, daß also hier eben alle Teile, welche jede bewegliche Flaschenscheibe von der ganzen Last Q zu tragen hat, mehr dem Teil q''' , welchen der Strick mS hält, zusammengenommen derselben gleich sind, und daß alle Teile der ganzen Kraft P , welche in jede bewegliche Flaschenscheibe würden, mehr der Kraft p''' , welche der Last q''' das Gleichgewicht hält, zusammengenommen derselben gleich sind, folglich, daß hier wiederum

$$\text{in der ersten } bc : ac = p' : q' = \frac{acp'}{bc}$$

$$\text{in der zwoten } ef : df = p'' : q'' = \frac{dfp''}{ef}$$

$$\text{und in C } ln : mo = p''' : q''' = \frac{mop'''}{ln}$$

$$\text{und das also } Q = \left(\frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{mo}{ln} \right) \times P$$

und diese Gleichung in folgende Proportion aufgelöst, giebt

$$P : Q = 1 : \frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{mo}{ln}.$$

Daraus erhellet, daß in diesem Falle die Kraft zur Last, wie 1 zur Summe aller Sehnen der beweglichen Flaschenscheiben dividirt durch ihre Radien, und der halben Sehne des Bogens den der Strick an der Scheibe C umgiebt, dividirt durch ihren Radius sich verhalte.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 274. Sind die Stricke, welche um die beweglichen Flaschenscheiben gehen, und von der Last angespannet werden, parallel, so werden die Sehnen der Bögen, welche an den beweglichen Flaschenscheiben von dem Strick umgeben werden, den Durchmessern derselben gleich, derowegen verhält sich in ieder die Kraft zur Last, wie der Radius zu seinem Durchmesser, daß ist also z. B. in fig. 91.

Fig. 91.

$$\text{in der ersten } bc : 2bc = p' : q' = \frac{2bcp'}{bc}$$

$$\text{in der zwoten } ef : 2ef = p'' : q'' = \frac{2efp''}{ef}$$

und in der letzten unbeweglichen wie der Radius zum halben Durchmesser

$$mn : ln = p''' : q''' = \frac{lnp'''}{mn}$$

$$\text{folglich ist } Q = \left(\frac{2bc}{bc} + \frac{2ef}{ef} + \frac{ln}{mn} \right) \times P$$

und wenn die Division wirklich verrichtet wird,

$$\frac{Q}{P} = 2 + 2 + 1 = 5$$

und also $P : Q = 1 : 5$.

Daraus also zu ersehen, daß in diesem Falle die Kraft zur Last, wie 1 zur doppelten Anzahl der beweglichen Flaschenscheiben mehr 1, oder auch wie 1 zur Anzahl der durch die beweglichen Flaschenscheiben angespannten Stricken sei.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 275. Wenn in den Flaschenzügen wie fig. 90, 91. 92. 93 die Last sich z. B. 1 Schuh in die Höhe bewe-

beweget, so mus ieder um die beweglichen Flaschenscheiben gehender oder durch dieselben angespannter Strick sich um eben so viel verkürzen, und der Teil, woran die Kraft P befindlich, sich so vielmal verlängern als angespannte Stricke vorhanden sind, folglich mus die Kraft in der nehmlichen Zeit einen um so vielmal grössern Raum als die Last beschreiben, als sie kleiner ist als diese. Daraus ist also zu schliessen, daß in diesen Flaschenzügen die Kraft zur Last wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten sich verhalten.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 90. §. 276. Nähme man in den Flaschenzügen fig. 90.
u. 92. und 92 die obere Flaschenscheiben A hinweg, und liesse die Kraft an iA aufwärts ziehen, so wäre alsdenn dennoch $P : Q = 1 : 6$, so wie in fig. 91. noch $P : Q = 1 : 5$ wäre, wenn auch noch eine unbewegliche Flaschenscheibe angebracht würde, daß die Kraft abwärts ziehen müste. Läßt man hingegen in fig. 92. die bewegliche Flaschenscheibe O hinweg, und befestiget den Strick ma an der untern beweglichen Flasche, so ist $P : Q = 1 : 5$. Ueberhaupt kommt es auf die Anzahl der angespannten Stricken an; wird diese geändert, so ändert sich auch das Verhältniß der Kraft zur Last.

Damit die Stricke in den Arten von Flaschenzügen fig. 90 und 91. neben einander vorbei können, und unter sich bei nahe parallel werden, so pflegt man die Durchmesser der Flaschenscheiben nach einer arithmetischen Progression einzurichten wie leicht aus den Figuren selbst zu sehen. Sehr oft werden die obern Flaschenscheiben alle neben einander an eine Achse AB fig. 93., und die untere neben einander an eine Achse CD angebracht, und

und allen gleiche Durchmesser gegeben. Das Verhältnis der Kraft zur Last ist in dieser Art wie in den vorigen zu berechnen.

Ubrigens ist bei allen dem, was von den Flaschenzügen hier gesagt worden, weder eine Reibung noch die Unbiegsamkeit der Stricke in Betrachtung gezogen worden, beide sind öfters, und sonderlich wenn mehrere Flaschenscheiben vorhanden, so beträchtlich, daß die Kraft bloß wegen diesen Hindernissen um vieles vermehret werden mus.

Von den Rädermaschinen.

Erklärung.

§. 277. Wenn an dem Umkreis eines Rades Zähne eingesezt oder eingeschnitten werden, in die alsdenn die Zähne eines andern Rades eingreifen, und dasselbe um ihre Achse bewegen, so wird ein dergleichen Rad ein Zahnrad genent.

Z u s a z.

§. 278. Ein Zahnrad ist also an sich betrachtet nichts anderes, als ein Rad an der Welle, und die Zähne vertreten die Stelle der Sprossen.

Z u s a z.

§. 279. Befinden sich die Zähne am Umkreis nach der Richtung der Radien, so heist das Rad insbesondere ein Sternrad; steht das Rad vertikal, und die Zähne sind auf der Fläche des Rades perpendicular, so wird es ein Kammrad genent; ist aber das Rad horizontal, und die Zähne sind auf der Fläche desselben perpendicular, so ist es ein Kronrad.

Erklärung.

§. 280. Jedes Zahnrad, welches in ein anderes größeres eingreift, wird ein **Getrieb** genent.

Z u s a z.

§. 281. Die Getriebe haben eben nicht allezeit die Gestalt eines ordentlichen Rades, sondern erhalten gemeiniglich bei grössern Maschinen anstatt der Zähne eine Anzahl so genannte **Triebstecken** oder **Spindeln**, welche zwischen zwei parallel stehenden Scheiben dergestalt eingemacht werden, und so weit von einander ab stehen, daß sie zwischen die Zähne des Rades, welches sie in Bewegung setzen sollen, ungehindert eingreifen können. Ein dergleichen Getrieb wird auch eine **Lanterne** genent.

Die **Getriebstecken** oder **Spindeln** werden allezeit parallel gemacht, wenn sie in ein **Eternrad** eingreifen, sollen dieselben aber ein **Kammrad** in die Bewegung setzen, so wird an dem Getriebe eine Scheibe öfters etwas grösser als die andere, so näher gegen dem Mittelpunkt des Kammrades ist, gemacht, und dadurch erhält das Getrieb die Gestalt eines abgestuften Kegels, wodurch die Reibung, die ansonst bei einem Kammrad grösser wäre, vermindert wird.

Z u s a z.

§. 282. Da die Zähne oder **Getriebstecken** oder **Spindeln** eines Getriebes in die Zwischenräume der Zähnen des Rades, so sie in Bewegung setzen sollen, eingreifen müssen, so ist erforderlich, daß ihre Dicke den Zwischenräumen der Zähnen des Rades, und diese den Zwischenräumen der **Triebstecken** gleich gemacht wer-

werden. Dadurch geschieht es, daß die Anzahl der Getriebstecken eines Getriebes sich zur Anzahl der Zähnen des Rades, worin sie greifen, wie der Umkreis oder Radius des einen zum Umkreis oder Radius des andern verhalte.

Bei der Einrichtung der Zahnräder und ihrer Getrieben hat man hauptsächlich zu beobachten, daß, nachdem einmal die Größe und das Verhältnis ihrer Radian durch die Umstände bestimmt ist, man ihnen soviel Zähne und Getriebstecken gebe, als thunlich ist, ohne jedoch dieselben dadurch zu schwach zu machen, daß sie der zu verrichtenden Arbeit nicht widerstehen könnten. Die Bewegung wird an Rädern und Getrieben von mehreren Zähnen und Spindeln viel sanfter, und die Reibung gelinder als in andern von gleichen Radian aber von weniger Zähnen und Spindeln.

Weil das Getrieb sich öfter als das Rad umdrähen mus, und folglich die Spindeln öfter als die Zähne des Rades eingreifen, und sich also auch geschwinde abnußen als diese, so pflegt man die erstern meistens von einer etwas härtern Materie und auch um etwas wenigens dicker als die Zähne zu machen; und zwar pflegt man die angenommene Dicke oder den Durchmesser einer Spindel in 8 gleiche Teile zu teilen; giebt der Zwischenweite von einer Spindel zur andern 7 Teile, folglich ist von einem Mittelpunkt einer Spindel bis zum andern 15. Zur Dicke eines Zahnes nimt man $6\frac{1}{2}$ zur Zwischenweite $8\frac{1}{2}$, folglich ist von dem Mittel eines Zahnes bis zu dem des folgenden ebenfalls wieder 15, und die Spindel hat zwischen zween Zähnen $1\frac{1}{2}$ Teil zur nöthigen Unterb. Mechanik, III. Th. D Wie.

Spielung. Oft werden die Spindeln und Zähne auch noch anders proportionirt.

Die Gestalt der Zähne betreffend, kan dieselbe verschieden gemacht werden; sie würden am vollkommensten sein, wenn man ihr die Krümme einer gewissen Gattung krummer Linien nemlich der Epicycloid gäbe, da aber dieses mühesam ist, so begnügt man sich in der Ausübung dem Zahne seine Dicke zu geben, und darauf noch einen halben Zirkel zu setzen, der die Dicke des Zahnes zum Durchmesser hat. Wenn aber das Getrieb, so in das Rad eingreift, wenig Spindeln hat, so werden die Zähne etwas spitziger gemacht.

Z u s a z.

§. 283. Wenn also die Dicke eines Zahnes oder einer Spindel, und ihre Anzahl einmal bestimmt ist, so kan man den Umkreis und Radius des Rades oder Getriebes finden, und wenn dieser gegeben wäre, so läßt sich die Anzahl der Zähne oder Spindeln von einer gewissen Dicke finden.

Der Radius eines Rades wird von dem Mittelpunkt desselben bis zu dem Mittelpunkt der Zahneslänge, oder bis zu dem Punkt, welchen die Spindeln des Getriebes an dem Zähnen berühren, und der Radius eines Getriebes von dem Mittelpunkt desselben bis zum Mittelpunkt eines seiner Getriebstecken oder Spindeln gerechnet.

Erklärung.

§. 284. Wenn mehrere Zahnräder und Getriebe dergestalt zusammengesetzt werden, daß immer ein Getrieb in ein Rad, desselben Getrieb wieder in ein anderes

Von zusammengesetzten Maschinen. 211

deres Rad u. s. w. greift, so wird dieses eine Rädermaschine genent.

Die Rädermaschinen haben ihren vortreflichen Nutzen, wenn man eine Kraft vermehren wil, und sehr grosse Lasten mit einer geringen Kraft bewegen sol; oder wenn eine Bewegung nach einem gewissen Zeitraum eingerichtet werden sol, z. B. wie die einer Uhr; oder wenn man die Geschwindigkeit vermehren sol, oder wenn man sehr kleine Bewegungen oder Räume, welche das bloße Auge nicht mehr wahrnehmen kan, merklich machen wil, z. B. wie bei dem Mikrometer.

Wenn eine Rädermaschine zur Bewegung einer Last angewendet wird, so wird gemeiniglich die Bewegung des ersten Getriebes wie an einen Rade an der Welle eingerichtet, d. i. es wird entweder durch angebrachte Sprossen, durch eine Kurbel, oder durch einen um die Wellen desselben gewundenen Strick, an welchen ie Kraft angebracht wird, in Bewegung gebracht. Das letzte Rad bekommt an seine Welle kein Getriebe, sondern der Strick, an dem sich die Last befindet, windet sich an derselben auf.

Sol eine Rädermaschine eine gewisse Zeit anzeigen, so bekommt die erste oder die letzte Welle einen Zeiger, welcher auf einem eigenen Zifferblatt die verlangten Zeiteile andeutet.

Lehrsatz.

§. 285. In einer Rädermaschine verhält sich die an dem ersten Getriebe an eine Kurbel angebrachte Kraft zu der an der letzten Welle sich aufwindenden, und mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last, wie das Produkt aus den Radien aller Getrieben und der Welle

auf welche sich die Last windet, zum Produkt aus den Radien aller Räder und der Kurbel.

Fig. 94. Beweis: Betrachtet, daß man jedes Rad mit seinem Getriebe, welches an der nemlichen Welle fest gemacht ist, als ein Rad an der Welle ansehen könne §. 278., und daß in demselben die Kraft zur Last, wie umgekehrt die Abstände derselben von ihrem Ruhepunkt, d. i. wie der Radius des Getriebes zum Radius des Rades sich verhalten. Wenn man also den Radius des ersten Rades A oder vielmehr der Kurbel mit e, den seines Getriebes mit a, den Radius des zweiten Rades B mit f, den seines Getriebes mit b, den Radius des dritten Rades C mit g, den seines Getriebes mit c, und den Radius des vierten Rades D mit h, und den der Welle mit d, die in die Kurbel und in jedes Rad insbesondere wirkende Kraft mit P, P', P'', P''', und die an jedem Getriebe und an der letzten Welle wirkende Last mit Q, Q', Q'', Q''' benennet, so ist

$$\text{in dem ersten } a : e = P : Q$$

$$\text{zweiten } b : f = P' : Q'$$

$$\text{dritten } c : g = P'' : Q''$$

$$\text{vierten } d : h = P''' : Q''' \text{ §.}$$

Ferner betrachtet, daß die Wirkung des ersten Rades

$$= \frac{Pe}{a} = Q \text{ die Ursache der Wirkung des zweiten}$$

sei, und daß dieselbe gleichsam als die Kraft P' angesehen werden könne; folglich ist

$$b : f = \frac{Pe}{a} : Q'$$

$$\text{Eben so ist die Wirkung des zweiten} = \frac{Pef}{ab} = Q''$$

als die Ursache der Wirkung des dritten oder als dessen Kraft P'' anzusehen, und

und bewegen ist $c : g = \frac{Pef}{ab} = Q''$

und endlich ist die Wirkung des dritten $= \frac{Pefg}{abc} = Q''$ als die Ursache der Wirkung oder als die Kraft P''' des vierten anzusehen, und es ist $d : h = \frac{Pefg}{abc} : Q''$

folglich ist $\frac{Pefgh}{abcd} = Q'''$.

Löst man nun die Gleichung in folgende Proportion auf, so ist

$$abcd : efgh = P : Q'''$$

Daraus also erhellet, daß in einer Rädermaschine die Kraft zur Last, wie das Produkt aus den Radien aller Getriebe und der Welle, auf welche sich die Last aufwindet, zum Produkt aus den Radien aller Räder und des Radius der Kurbel sich verhalte.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 286. Es kommt also bei einer Rädermaschine auf das grössere oder kleinere Verhältnis der Radien der Getriebe und Räder, und auf die Anzahl derselben an, auf das eine Last leichter oder schwerer bewegt werde. Sind daher alle Radien derselben bekannt, und die Kraft ist gegeben, so läßt sich die Last, und umgekehrt wenn diese gegeben wären, die Kraft nach obigen Lehrsatzen finden, welche mit der einen im Gleichgewicht stehen.

L e h r s a t z.

§. 287. Wenn eine Rädermaschine bewegt wird, so muß ein jedes Getrieb sich so vielmal ganz umdrähen, bis das Rad sich, worin es greift, einmal um-

drähet, als seine Anzahl Spindeln in der Anzahl der Zähnen des Rades enthalten ist.

Beweis: Wenn das Getrieb sich einmal umdrähet, so bewegt sich das Rad, in welches dasselbe eingreift, nur um so viele Zähne, als das Getriebsspindeln enthält, um also das Rad ganz herum zu drähen, muß sich das Getrieb so oft ganz umdrähen, als die Anzahl seiner Spindeln in der Anzahl der Zähnen des Rades enthalten ist.

Z u s a z.

§. 288. Aus diesem folgt also, daß die Umdrä-
hungen eines Getriebes und eines Rades darein es grei-
fet, in umgekehrter Verhältnis der Anzahl ihrer Spin-
deln und Zähnen stehen; und da die Anzahl der Spin-
deln und Zähnen sich wie ihre Umkreise oder Radien
verhalten §. 282., so verhalten sich auch die Umdrä-
hungen eines Getriebes und Rades wie umgekehrt ihre
Umkreise oder Radien; oder das Getriebe muß sich um
so geschwinder oder öfter umdrähen, als dessen An-
zahlspindeln oder dessen Umkreis oder Radius kleiner
ist, als die Anzahl der Zähnen oder der Umkreis oder
Radius des Rades.

Z u s a z.

§. 289. Es kan daher die Anzahl der Umdrähun-
gen eines Getriebes, indem sich sein Rad, worein es
greift, einmal umdrähet, allezeit durch einen uneig-
entlichen Bruch ausgedruckt werden, davon die Anzahl
der Zähnen des Rades der Zähler, und die Anzahl
der Spindeln des Getriebes der Nenner ist. Z. B.
das Rad hätte 80 Zähne, und das Getrieb 10 Spin-
deln, so ist $\frac{80}{10} = 8 =$ den Umdrähungen.

Eben

Eben so läßt sich die Umdrähung des Rades, indem sich sein Getrieb nur einmal umdrähet, durch einen eigentlichen Bruch vorstellen, davon die Anzahl der Spindeln der Zähler, und die Anzahl der Zähne der Nenner ist. Daher würde sich das Rad nach obigen Beispiel $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ mal umdrähen, indem sich das Getrieb einmal umdrähet.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 290. Wenn man z. B. in der vorigen Maschine Fig. 94. die Umdrähungen der Kurbel und des an der nehmlichen Welle befindlichen Getriebes mit A, die des ersten Rades samt dem daran befindlichen Getriebe mit B, die des zweiten samt seinen Getriebe mit C, und die des dritten samt seiner Welle mit D; ferner die Radian, Umfreise oder Anzahl der Spindeln der Getriebe mit a, b, c, und die Radian, Umfreise, oder die Anzahl der Zähne der Räder mit f, g, h benennet, so ist nach §. 288.

$$A : B = f : a$$

$$B : C = g : b$$

$$C : D = h : c$$

$$\text{und } ABC : BCD = fgh : abc$$

$$\text{folglich ist } ABC \times abc = BCD \times fgh$$

$$\text{oder } A \times abc = D \times fgh$$

und diese Gleichung in folgende Proportion aufgelöst:

$$A : D = fgh : abc.$$

Daraus also erhellet, daß die Umdrähungen der Kurbel und ihres Getriebes zu den Umdrähungen des letzten Rades und seiner Welle wie das Produkt der Radian, Umfreise, oder Anzahlzähnen aller Räder zum Produkt der Radian, Umfreise, oder Anzahlspindeln aller Getrieben sich verhalten.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 291. Drähet sich demnach das letzte Rad und seine Welle einmal um, so kan man finden, wie oft sich die Kurbel in der nehmlichen Zeit umdrähen mus, wenn man setzt, $abc : fgh = 1 : A$ und $\frac{fgh}{abc} = A$ der Anzahl der Umdrähungen der Kurbel.

Es läßt sich also die Anzahl der Umdrähungen der Kurbel oder überhaupt des ersten Getriebes, indem sich das letzte Rad mit ihrer Welle einmal umdrähet, allezeit durch einen uneigentlichen Bruch, davon das Produkt der Anzahl der Zähnen, der Umkreisen, oder Radien aller Räder der Zähler, und das Produkt der Anzahlspindeln der Umkreisen, oder Radien aller Getriebe der Nenner ist, vorstellen.

L e h r s a t z.

Fig. 94. §. 292. In einer Rädermaschine verhält sich die Kraft zur Last, wie umgekehrt ihre Räume, welche sie in gleicher Zeit beschreiben.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn sich das letzte Rad D mit seiner Welle einmal umdrähet, von dem Stricke, daran die Last hanget, sich so viel um die Welle winde, oder die Last um so viel bewege, als der Umkreis der Welle beträgt, und daß die Kraft, welche am Ende der Kurbel angebracht ist, indessen so viele Umkreise, deren Radius die Länge der Kurbel ist, beschreiben müsse, so oft sich dieselbe in der Zeit, da das letzte Rad D sich einmal herum bewege, umdrähen mus §. 291. Wenn man demnach wie zuvor die Umkreise der Getriebe und der letzten Welle durch $abcd$, und die Umkreise der Kurbel und aller Räder durch

durch $efgh$ ausdrückt, so ist $\frac{fgh}{abc}$ die Anzahl der Umbrähungen der Kurbel, indem sich die Welle, woran sich die Last aufwindet, einmal umdrähet §. 291. d ist folglich der Weg oder Raum den die Last beschreibt, und wenn man die Anzahl der Umbrähungen der Kurbel durch den Umkreis derselben multiplicirt, so ist $\frac{efgh}{abc}$ der Weg, den die Kraft beschreibt. Es wäre

nun zu erweisen, daß $P : Q = d : \frac{efgh}{abc}$.

Um nun dieses zu bewerkstellen, so betrachtet, daß die Kraft sich zur Last wie das Produkt aller Radien der Getriebe und der Welle zu dem Produkt der Radien aller Räder und der Kurbel verhalte, §. 285. Da sich aber die Umkreise wie ihre Radien verhalten, so kan man auch sagen, daß:

$$P : Q = abcd : efgh.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Produkt der Umkreise aller Getriebe und der letzten Welle, zum Produkt der Umkreise der Kurbel und aller Räder;

$$\text{folglich ist } Qabcd = Pefgh$$

$$\text{und } Qd = \frac{Pefgh}{abc}.$$

Löst man die Gleichung in folgende Proportion auf,

$$\text{so ist } P : Q = d : \frac{efgh}{abc}$$

woraus also erhellet, daß die Kraft sich zur Last wie umgekehrt die Räume, welche sie in gleicher Zeit beschreiben, verhalte.

Aufgabe.

§. 293. Es sei eine Rädermaschine anzuordnen, in welcher das erste Getrieb eine verlangte Anzahl Um-

drähungen machet, indem das letzte Rad mit seiner Welle sich einmal umdrähet, und man sol sowohl die Anzahl der Räder und Getrieben, als auch ihre Radien und die Anzahl der Zähnen und Spindeln eines jeden angeben.

Da diese Aufgabe eigentlich unter die unbestimmte Gattung, d. i. unter jene, welche mehrere Auflösungen leiden, gehöret, so ist es auf gewisse Weise willkürlich, wie viele Räder und Getriebe ihr anwenden sollet, wenn euch nicht etwann der Platz oder andere Umstände zu einer gewissen Zahl und Grösse derselben nöthigen. Wir wollen aber setzen, daß ihr drei Räder, und eben so viele Getriebe machen, und den Getrieben sowohl eine gleiche Anzahlspindeln $= n$ als gleiche

Radien $= r$ geben wollet, und daß durch $\frac{m}{I}$ und zwar durch den Zähler die gegebene Anzahl der Umdrähung des ersten Getriebes, und durch den Nenner die Umdrähung des letzten Rades ausgedruckt werde.

Auflösung: I. Zertheilet die gegebene Anzahl der Umdrähungen des ersten Getriebes in so viele kleine Factoren, als ihr Räder nehmen wollet. dieses geschieht in Zahlen meistens durch einige Versuche, indem man solche Zahlen suchet, deren Produkt der gegebenen Anzahl der Umdrähungen gleich ist, wir wollen setzen, daß diese a , b und c wäre,

$$\text{und daß also } \frac{a}{I} \times \frac{b}{I} \times \frac{c}{I} = \frac{m}{I} \text{ seie.}$$

Solte es sich aber ereignen, daß die gegebene Anzahl der Umdrähungen sich nicht in die verlangte Anzahlfactoren zer-

Von zusammengesetzten Maschinen. 219

zerfallen liesse, so versuchet es mit mehreren oder weniger, und nehmet alsdenn eben so viele Räder, als ihr Factoren erhalten habt.

2. Nehmet die Anzahlspindeln n , welche ihr den Getrieben geben wolt, willführlich an, und multiplicirt sowohl die Zähler als Nenner der obigen drei Brüchen oder Verhältnissen, so bekommt ihr $\frac{an}{n} \cdot \frac{bn}{n} \cdot \frac{cn}{n}$, wovon die Zähler die Anzahlzähne eines jeden Rades, und die Nenner die Anzahlspindeln eines jeden Getriebes anzeigen §. 287.

3. Nehmet auch die Radien r der Getrieben nach Belieben, d. i. nachdem ihr die Maschine gross machen wollet, an; multipliciret mit dieser Grösse sowohl die Zähler als Nenner der obigen Brüchen oder Verhältnissen, so bekommt ihr $\frac{ar}{r} \cdot \frac{br}{r} \cdot \frac{cr}{r}$, wovon die Zähler die Radien der Räder, und die Nenner die Radien der Getrieben vorstellen. §. 288.

Beispiel.

Es sei, daß das erste Getrieb 16mal umlaufen sol, indem das letzte Rade einmal umgeht, diese Zahl nun in die gehörige Factoren zerlegt, giebt $4 \times 2 \times 2 = 16$ der Verhältnisse eines jeden Rades zu seinen Getriebe.

Ferner nehmen wir an, daß man einem jeden Getriebe 12 Spindeln geben wolle; folglich mit dieser Zahl obige Verhältnisse multiplicirt, giebt $4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}$, wovon die Zähler die Anzahlzähne eines jeden Rades, und die Nenner die Anzahlspindeln ihrer Getriebe anzeigen.

Ende

Endlich setzen wir, daß man jeden Radius der Getriebe $\Rightarrow 2$ machen wolle; folglich wenn man damit obige Verhältnisse abermal multiplicirt, so bekommt man $\frac{3}{2} \frac{1^{\circ}}{2} \frac{1^{\circ}}{2}$, wovon ein ieder Zähler den Radius eines Rades und ieder Nenner den Radius dessen Getriebes vorstellt.

Z u s a z.

§. 294. Woltet ihr aber den Getrieben keine gleiche Anzahlspindeln, und keine gleiche Radien geben, so multiplicirt die obige Verhältnisse der Räder zu ihren Getrieben ein jedes mit der angenommenen Anzahlspindeln des Getriebes, und dann auch eben dieselben ein jedes mit dem angenommenen Radius seines Getriebes, so werden wenn z. B. n, o, p die Anzahlen der Spindeln, und r, s, t die Radien der Getriebe wären, von den daraus entstehenden Produkten $\frac{an}{n} \frac{bo}{o}$

$\frac{cp}{p}$ die Zähler die Anzahlzähne der Räder, und die Nenner die Anzahlspindeln der Getriebe, so wie von $\frac{ar}{r} \frac{bs}{s} \frac{ct}{t}$ die Zähler die Radien der Räder, und die Nenner die Radien der Getrieben vorstellen.

B e i s p i e l.

Es sei, daß man dem ersten Getriebe 8, dem zweiten 10, und dem dritten 12 Spindeln geben wolle, so werden, wenn ihr damit die Multiplication an den obigen Verhältnissen verrichtet, $\frac{1^{\circ}}{8} \frac{1^{\circ}}{10} \frac{1^{\circ}}{12}$, die Zähler die Zähne eines jeden Rades und die Nenner die Spindeln ihrer Getriebe vorstellen.

Um

Von zusammengesetzten Maschinen. 221

Um sich davon zu überzeugen, so betrachtet, daß $1 : 160 = 8 \times 10 \times 12 : 32 \times 50 \times 96 = 960 : 153600$ sei. §. 290.

Nicht minder sehen wir, daß man dem ersten Getrieb 6, dem zweiten 7 und dem dritten 8 zum Radius geben wolle, so werden, wenn man damit die Multiplikation wie gleich oben verrichtet, von den daraus entstehenden Produkten $\frac{2^4}{8}$ $\frac{3^5}{7}$ $\frac{4^4}{8}$ die Zähler die Radien der Räder, und die Nenner die Radien ihrer Getriebe vorstellen, weil wiederum $1 : 160 = 6 \times 7 \times 8 : 24 \times 35 \times 64$ ist.

A u f g a b e.

§. 295. Es sei eine Rädermaschine anzuordnen, in welcher eine gewisse an die Kurbel des ersten Getriebes angebrachte Kraft, mit einer an die letzte Welle sich aufwindenden und gegebenen Last im Gleichgewicht steht, und man sol sowohl die Anzahl der Räder und Getriebe, als auch ihrer Zähnen und Spindeln und ihre Radien angeben.

Diese Aufgabe gehöret eben wie die vorige unser die unbestimmten, oder kan auf mehrer Arten aufgelöst werden, und man ist an eine gewisse Anzahlräder, und an ihre Größe nicht gebunden, wenn man nicht durch Umstände dazu genöthiget ist.

Auflösung: 1. Dividiret die Zahl, welche die gegebene Last ausdrucket, durch die Zahl, welche die Kraft andeutet; den Quotienten sethet als den Zähler eines Bruches an, der die Einheit zum Nenner hat, und das Verhältniß der Kraft zur Last anzeigt.

222. II. Abschnitt. II. Hauptstück.

2. Zerfallet den Zähler dieses Bruches durch einige angestellte Versuche in so viele Faktoren als ihr Welbäume, oder samt der Kurbel Räder machen wollet, doch so, daß das Produkt dieser Faktoren dem Zähler des Bruches gleich sei.

3. Setzt diese Faktoren ebenfalls als die Zähler so vieler Brüche an, deren ieder die Einheit zum Nenner hat, so stellen sie die Verhältnisse vor, welche die Getriebe und die letzte Welle zu der Kurbel und zu den an den nemlichen Welbäumen befestigten Rädern haben sollen.

4. Nehmet an, wie groß ihr die Radian der Getriebe und der letzten Welle machen wollet; dabei ihr aber Sorge zu tragen habt, daß die letztere Getriebe immer einen grösseren, und die letzte Welle den größten Radius erhalte, weil sie den größten Teil der Last zu tragen hat, und wenn sie zu klein angenommen würde, ein sehr dicker Strick, wie er zu einer sehr beträchtlichen Last erforderlich ist, sich sehr unbequem aufwinden liesse.

5. Multipliciret diese angenommene Radian einen ieden durch den Zähler und auch durch den Nenner eines der obigen Brüche, und zwar einen ieden durch einen andern, so erhaltet ihr wieder neue Brüche, deren Nenner die Radian der Getriebe und der letzten Welle, und die Zähler die Radian der Kurbel und der Räder anzeigen.

6. Um die Dicke der Spindeln und Zähnen zu bestimmen, ist vor allen erforderlich, daß ihr die Stärke derselben in dem letzten Getriebe, welches in das letzte Rade eingreift, so stark annehmet, daß sie durch die Last nicht zerbrochen werden können. Suchet daher
den

den Umkreis des letzten Getriebes; dividiret denselben mit einer beliebigen Zahl, die ihr glaubet für die Anzahl der Spindeln dieses Getriebes annehmen zu können, der Quotient wird euch die Dicke einer Spindel samt einer Zwischenweite anzeigen. Scheinet euch nun diese noch zu schwach, so nehmet einen etwas kleinern Divisor an, und dividiret von neuen, bis ihr sehet, daß euch der Quotient eine hinlängliche Stärke für die Spindeln giebt, welche zugleich die Dicke eines Zahnes und einer Zwischenweite an dem letzten Rade sein wird. Da die Spindeln und Zähne der übrigen Getrieben und Rädern, so wie sie von dem letztern weiter abstehen, immer weniger Gewalt auszustehen haben, so könnt ihr auch ihre Dicke vermindern, dieses aber wird geschehen, wenn ihr einen jeden Getriebe, weiß ihre Radian schon nach Maas, als sie weniger auszustehen haben, abnehmen, eine gleiche Anzahlspindeln gebet. Es versteht sich von selbst, daß, wann die Radian der Getriebe alle gleich angenommen wären, ihr dem erstern mehrere Spindeln als dem letzten zu geben hättet. Dieses also vorausgesetzt, suchet mit Hülfe der gefundenen oder angenommenen Radian ihre Umkreise, dividirt sie mit dem zuvor angenommenen Divisor, welcher die Zahl der Spindeln ausdrucket, so wird euch der Quotient eines jeden die Dicke einer Spindel oder eines Zahnes samt einer Zwischenweite geben; die ihr übrigens nach der nach S. 282. gegebene Anmerkung gehörig einteilen könnet.

7. Um noch die Anzahl der Zähnen eines jeden Rades zu finden, so dividiret dessen Umkreis durch die Dicke und Zwischenweite einer Spindel des Getriebes welches in dasselbe eingreift, der Quotient wird die Anzahl der Zähne des Rades anzeigen. Oder da sich die Radian wie die Umkreise, und diese wie die Anzahl

zahl der Spindeln und Zähne verhalten, so setzt: wie der Radius des Getriebes zum Radius des Rades, in welches dasselbe eingreift, eben so verhält sich die Anzahl der Spindeln des nehmlichen Getriebes zur Anzahl der Zähne dieses Rades.

Beispiel.

Es sei eine Rädermaschine anzuordnen, in welcher die Kraft eines Menschen $= 25 \text{ W}$ an der Kurbel angebracht, mit einer an der letzten Welle aufzumwindenden Last von 12000 W im Gleichgewicht stehen sol, und die Umstände erforderten 4 Welsbäume, oder eine Kurbel drei Räder und eben so viele Getriebe, samt der letzten Welle worauf sich die Last windet. Da ist nun

$\frac{12000}{25} = 480 = 4 \times 4 \times 4 \times 4$ welche letztere Brüche die Verhältnisse der Getriebe und Räder andeuten.

Es sei, daß der Radius der letzten Welle $= 9$ sein müsse, damit sie die gegebene Last zu ertragen im Stand sei, und der Strick sich bequem auf dieselbe winden lasse, und daß der Radius des letztern Getriebes $= 6$, der des mittlern $= 5$, und der des erstern an der Kurbel $= 4$ angenommen werde.

Die obige Verhältnisse nun mit diesen angenommenen Radien multiplicirt, giebt $\frac{12}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{7}{9}$, wovon der erste Zähler der Radius der Kurbel, der zweite der des ersten Rades, der dritte der des zweiten, und der vierte der des dritten Rades ist, und der erste Nenner ist der Radius des ersten Getriebes, der zweite des zweiten, der dritte des dritten, und der vierte der letzten Welle.

Um.

Umfreise der Kurbel und Räder

$$\begin{array}{cccc} 75\frac{1}{2} & 125\frac{1}{2} & 188\frac{1}{2} & 452\frac{1}{2} \\ 25\frac{1}{2} & 31\frac{1}{2} & 37\frac{1}{2} & 56\frac{1}{2} \end{array}$$

Umfreise der Getriebe und der letzten Welle.

Nehmet für jedes Getriebe z. B. 9 Spindeln an, so sind $37\frac{1}{2} : 9 = 4\frac{1}{2}$, $31\frac{1}{2} : 9 = 3\frac{1}{2}$ und $25\frac{1}{2} : 9 = 2\frac{7}{9}$ die Dicken der Spindeln und einer Zwischenweite der drei Getriebe, und auch der Zähne samt ihrer Zwischenweite der Räder, in welche sie eingreifen müssen.

Um die Anzahl der Zähne der Räder zu finden, so setzet: wie sich der Radius eines jeden Getriebes zum Radius des Rades, in welches dasselbe eingreift, verhält, eben so verhält sich die Anzahl der Spindeln des nemlichen Getriebes zur Anzahl der Zähne desselben Rades. D. i.

$$4 : 20 = 9 : x = \frac{20 \times 9}{4} = 45 \text{ Anzahlzähne des 1ten Rades}$$

$$5 : 30 = 9 : x = \frac{30 \times 9}{5} = 56 \text{ Anzahlzähne des 2ten Rades}$$

$$6 : 72 = 9 : x = \frac{72 \times 9}{6} = 108 \text{ Anzahlzähne des 3ten Rades.}$$

Ofters wird bei Rädermaschinen z. B. bei einer gewöhnlichen Wagen oder Fuhrmannswinde anstatt der letzten Welle noch ein Getriebe, welches in eine steife gerade, und an der Seite mit Zähnen versehen Stange eingreift, angebracht. Es verändert aber diese Einrichtung nichts in der gegebenen Berechnungsart der Kräfte der Maschine.

chine, Man hat nur dieses letzte Getriebe als die Welle, worauf sich sonst der Strick windet, die Stange aber als den Strick selbst zu betrachten.

Von der Schraube ohne Ende.

Erklärung.

Fig. 95. §. 296. Wenn die Gänge einer Schraubenspindel BF in die Zähne eines Stiernrades anstatt einem gewöhnlichen Getriebe eingreifen, so wird diese Maschine eine Schraube ohne Ende genent.

Z u s a z.

§. 297. Die Zähne an dem Stiernrade müssen etwas schräge d. i. nach den Winkel welchen die Schraubengänge mit der Spindel machen, eingerichtet werden, damit die Schraube gut eingreifen könne; und diese brauchet nur einige wenige Gänge zu haben, weil die übrigen ohnehin nicht eingreifen könnten. Gewöhnlicher Weise wird die Kraft an der Kurbel der Schraubenspindel und die Last an die Welle des Rades angebracht; wie wohl es auch manchmal umgekehrt geschieht, nemlich wenn man eine sehr schnelle Bewegung herfür bringen will.

Lehrsatz.

§. 298. Wenn eine Kraft mit einer an eine Schraube ohne Ende angebrachten Last im Gleichgewicht stehen sol, so mus sich die erstere zur andern wie das Produkt der Schraubengangweite in den Radius der Welle, woran die Last befindlich, zum Produkt des Umkreises, den die Kraft an der Kurbel beschreibet, in den Radius des Rades verhalten.

Be-

Beweis: Es sei die Weite eines Schraubenganges an der Spindel $BF = a$; der Umkreis, den die an die Kurbel angebrachte Kraft bei einer Umdrehung derselben beschreibt, $= C$; der Radius der Welle, woran sich die Last aufwindet $= r$; der Radius des Stiernrades $= R$; die an die Kurbel angebrachte Kraft $= P$; die Last oder der Widerstand, den ein Schraubengang auszustehen hat $= q$; die Kraft welche an die Zähne des Rades wirken mus, um der Last an der Welle das Gleichgewicht zu halten $= p$; und die Last, welche mit der an der Kurbel angebrachten Kraft im Gleichgewicht stehen sol $= Q$; so ist erstlich, wenn man sowohl die Schraube, als das Rad an der Welle einzeln betrachtet:

$$a : C = P : q. \text{ §. 261.}$$

$$\text{und } r : R = p : Q. \text{ §. 231.}$$

Folglich ist $\frac{CP}{a} = q$ gleichsam als die Wirkung der Schraube in das Rad anzusehen, oder als die Kraft p zu betrachten, welche an die Zähne angewendet werden mus; derowegen kan man anstatt derselben in der vorigen Proportion setzen:

$$r : R = \frac{CP}{a} : Q$$

$$\text{und also ist } \frac{CRP}{a} = rQ$$

$$\text{oder } \frac{CRP}{ar} = Q.$$

Lösset man nun die Gleichung in folgende Proportion auf, so ist $P : Q = ar : CR$. D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Produkt der Schraubengangweite in den Radius der Welle zum Produkt des Umkreises der Kurbel in den Radius des Rades.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 299. Wenn man betrachtet, daß das Rad nur eine Zahnweite gehet, indem die Kurbel sich einmal ganz herumdrähet, so siehet man, daß die an der Kurbel befindliche Kraft so viele Umläufe beschreiben mus, als Zähne in dem Rade enthalten sind, bis das Rad einmal herumgeht, oder bis die an der Welle befindliche Last einen Weg gemacht hat, der dem Umlauf der Welle gleich ist. Wenn nun dieser $= s$; der Umlauf der Kurbel $= C$; die Anzahl der Zähne oder der Umlauf des Rades $= N$ ist, so stellet CN den Weg der Kraft in der nehmlichen Zeit vor, und folglich kan man setzen: $P : Q = S : CN$. §. 267., weil sowohl die Schraube als das Rad an der Welle als Hebeln betrachtet werden können; daß daher an einer Schraube ohne Ende die Kraft zur Last wie der Umlauf der Welle zum Produkt des Umlaufes der Kurbel in die Anzahl der Zähne oder in den Umlauf des Rades sich verhalten müsse, wenn sie einander das Gleichgewicht halten sollen.

Aus diesem ist nun unschwer zu erkennen, daß bei der Schraube ohne Ende an der Kraft sehr viel zu gewinnen sei, oder mit einer sehr geringen Kraft eine grosse Last wie wohl sehr langsam bewegt werden könne, wenn die erste an der Kurbel, die andere aber an der Welle angebracht wird; so wie im Gegentheile nehmlich: wenn die Kraft an der Welle, die Last aber an der Schraubenspindel befindlich ist, eine sehr grosse Kraft erfordert wird, hingegen aber eine sehr schnelle Bewegung derselben herfür gebracht wird.

Der Theorie nach sollte man durch mehrere zusammengesetzte Schrauben ohne Ende mit einer sehr geringen

geringen Kraft ganz ungeheure Lasten bewegen können; da aber die Reibung an derlei Maschinen so beträchtlich wird, daß man in manchen Fällen zur Überwindung derselben mehr Kraft als zur Hebung der Last selbst nöthig hat, so würde der Vorteil, den man davon zu ziehen glaubte, nur in der Einbildung bestehen. Die Umstände allein können und müssen bestimmen, wann und wo eine Schraube ohne Ende mit Nutzen anzuwenden sei. Eine Erinnerung die in der Mechanik überhaupt nie oft genug gemacht werden kan.

Von dem sogenannten Artilleriehebzeuge.

§. 300. Man bedient sich bei der Artillerie eines fast allgemein bekanten Hebzeuges, um das schwere Geschütz aus und in ihre Laffeten zu heben. Seine Einrichtung ist zwar oft in einigen Stücken unterschieden, im wesentlichen aber sol er allezeit folgende Eigenschaften haben. 1ten: Mus sein Gestell so beschaffen sein, daß es Stärke genug hat, die Last des schweresten Geschützes, so man damit heben wil, zu tragen, und daß es aller Orten leicht, und ohne viele Weitläufigkeit aufgerichtet werden könne. 2ten: Daß man ein Geschütz auf seiner Laffeten bequem darunter führen, und aus seinen Schildpfannen noch etwas in die Höhe heben könne. 3ten: Daß er überhaupt so eingerichtet sei, damit man an der Kraft soviel gewinne, daß einige Menschen ein schweres Geschütz aufheben können. 4ten: Daß die an dem Stricke freihangende Last in allen Stellungen still zu halten, und die Bewegung der Maschine zu sperren gericht sei.

Fig. 96.

Um also diese Absichten zu erreichen, wird das Gerüst meistens aus vier und oft auch nur drei getaden Balken dergestalt zusammengesetzt, daß sie oben gleichsam in einen Punkt zusammenlaufen, und durch eine starke eiserne Spindel oder Nagel A, welcher durch die an ihren obern Enden befindliche Löcher gesteckt wird, zusammen gehalten werden, unten aber soweit auseinander stehen, daß man ein Geschüß darunter führen kan. Oben an die eiserne Spindel wird gewöhnlich ein Flaschenzug CD von zwei oder drei unbeweglichen und eben soviel beweglichen Flaschenscheiben aufgehangen. Das eine Ende des um dieselbe gewundenen Strickes wird an einen horizontal an zween Balken angebrachten Wellbaum E befestiget, um denselben daran aufwinden zu können. Damit sich dieser Wellbaum umbrähen lasse, werden an seinen beiden Enden entweder Sprossen wie an einem Haspel, oder ein eisernes Sternrad angebracht, in welches entweder ein Getrieb, oder eine Schraube ohne Ende greifet, nachdem man gefunden ist, die Kraft zu vermehren. Damit aber die Maschine in allen Stellungen so oft es erforderlich, gesperrt werden könne, so wird an dem Wellbaum nahe an einem der beiden Balken ein eisernes so genanntes Sper oder Stelrade G, dessen Zähne auf einer Seite perpendicular, auf der andern aber schräge eingeschnitten sind, angebracht, auf welchen alsdenn ein an dem Balken befestigter, aber um seinen Ruhepunkt beweglicher so genannter Stel oder Sperhacken H auflieget, im Aufziehen über die gedachten Zähne hinweg glitschet, im Nachlassen aber sich gleich an den nächsten anstemmet, und die Last weiter hinabzusinken verhindert, wenn er nicht, da es erfordert ist, ausgehoben wird.

Um

Von zusammengesetzten Maschinen. 231

Um zu wissen welche Last durch eine gewisse an diese Maschine gebrachte Kraft gehoben werden könne, oder umgekehrt, welche Kraft erfordert wird, um eine gegebene Last in Bewegung zu setzen, so hat man anfänglich den Stand des Gleichgewichtes der Kraft und Last zu betrachten, und denn zur wirklichen Überwindung sowohl desselben, als der Reibung der Maschine entweder die Kraft noch um etwas zu vermehren, oder die Last zu vermindern. Wo aber von der letzten in seinem Orte noch ein mehreres vorkommen sol. Bestünde also z. B. der daran befindliche Flaschenzug aus drei beweglichen und soviel unbeweglichen Scheiben, so würde im Stand des Gleichgewichtes die an dem einen Ende des Stricks unmittelbar angebrachte Kraft zu der an den beweglichen Flaschenscheiben hangenden Last wie 1 : 6 sein, S. 270. Wäre ferner der Radius des Welbaums = 5 Zoll, und der Radius oder die Länge eines Sprossens = 25 Zoll, so ist die an den Sprossen angebrachte Kraft zu der an dem Strick wirkenden Last wie 5 : 25 oder wie 1 : 5. S. 231. Da nun hier wie bei allen zusammengesetzten Maschinen eine in die andere wirkt, so verhält sich die an die Sprossen angebrachte Kraft zu der an dem Flaschenzug hangenden Last wie das Produkt der einzelnen Kräfte an dem Strick des Flaschenzugs und an dem Welbaum, zum Produkt der einzelnen Lasten an dem Flaschenzug und Welbaum: d. i. $P : Q = 1 \times 1 : 6 \times 5 = 1 : 30$, oder die Kraft kan bei dieser Einrichtung 30mal minder als die Last sein, damit sie einander das Gleichgewicht halten. Wird nun die Kraft von vier Menschen, die man hier bei ieden für 50 Th und also zusammen für 200 Th annehmen kan, an die Sprossen angebracht, so ist $1 : 30 = 200 : x = 6000 \text{ Th}$,

oder die Kraft dieser 4 Menschen wird mit einer Last von 60 Centnern im Gleichgewicht stehen.

Auf eine ähnliche Art hätte man mit der Berechnung zu verfahren, wenn anstatt der Sprossen ein Stiernrad und Getrieb, oder eine Schraube ohne Ende u. d. gl. angebracht wären.

Eine andere sehr einfache und nützliche Art eines solchen Hebzeuges ist folgende: das Gestell ist überhaupt wie in dem vorigen beschaffen, nur werden oben zwei unbewegliche Flaschenscheiben A, B neben einander und in C eine bewegliche angebracht um den Strick die nöthige Richtung zu geben. Die Länge des Wellbaums ist in zwei Teile geteilt, und der eine hat einen grössern Durchmesser als der andere, so zwar daß der kleinere nur $\frac{2}{3}$ von dem grössern ist. Beide Ende des Stricks werden und zwar eines an dem dickern, und das andere an dem dünnern Teil befestiget, aber auf dieselbe verkehrt aufgewickelt, so daß wenn der Wellbaum umgedrähret wird, und die Last gehoben werden sol, der Strick sich an dem dicken Teil auf, und an dem dünnern abwinden mus; sol man aber die Last sinken lassen, so geschieht es umgekehrt. Nebst dem daß die Kraft durch diese Maschine vermehret wird, hat sie auch noch die besondere Eigenschaft, daß die Last nie für sich zurücksinkt, wenn auch gleich die an den Sprossen angebrachte Kraft zu wirken aufhöret. Man hat also dabei kein sogenantes Stell oder Sperrade mit seinem Einsalhacken nöthig wie in dem vorigen Hebzeuge. Um zu wissen wie viel die Kraft an dieser Maschine vermehret wird, kan man sich einer der folgenden Berechnungsarten bedienen:

Ex.

Erste Art: Da jede zusammengesetzte Maschine Fig. 98. aus mehreren in einander wirkenden Hebeln bestehend angesehen werden kan §. 264. und in diesen die Kraft zur Last sich wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten oder die Wege, so sie in gleicher Zeit beschreiben, verhält, §. 219 u. 267. so hat man auch nur diese Geschwindigkeiten folgender Maassen zu suchen, nemlich: es seie die Länge ED des Sprossens oder Hebbaums bis in den Mittelpunkt der Welle = 6 Sch. der grössere Durchmesser der Welle = 12 Zoll, und der kleinere = 8 Zoll. Drähet sich nun der Welbaum einmal um, so beschreibet die in E angebrachte Kraft P einen Umkreis, der ED zum Radius hat, und den wir also um die Brüche zu vermeiden = 36 Sch. annehmen wollen, und der zugleich die Geschwindigkeit der Kraft ausdrückt. In eben dieser Zeit windet sich der Strick auf dem dicken Teil des Welbaums, der 12 Zoll zum Durchmesser hat, 3 Sch. auf, und von dem kleinern, der 8 Zoll ist, 2 Sch. ab; da es aber einerlei Strick ist, so kan sich dort nicht mehr auf, und hier nicht weniger abwinden, ohne daß der Teil, an welchen die Last hanget, um so viel verkürzt würde, als sich an dem einen in eben der Zeit weniger abwindet, so ist klar, daß der Strick sich hier um 1 Schuh verkürze; weil aber diese Verkürzung in beide Teile L und M vertheilet werden mus, indem er doppelt ist, so wird ieder nur um 6 Zoll verkürzt, folglich beschreibet die Flaschenscheibe C mit der daran hangenden Last Q in der nemlichen Zeit, als die Kraft einmal herumgeheth, nur 6 Zoll. Daher verhält sich auch die Geschwindigkeit der Last zur Geschwindigkeit

Fig. 97.

der Kraft wie 6 Zoll zu 36 Sch. oder wie 1 : 72, und also auch die Kraft zur Last, d. i. $P : Q = 1 : 72$. S. 219 u. 267.

Zweite Art: Nehmet die vorigen Maassen an, und betrachtet, daß die Last $Q = 72$ durch die bewegliche Flaschenscheiben C bis auf die Hälfte, nemlich auf 36 vermindert werde, S. 244. Da aber diese Last in beide Stricke L und M gleichsam vertheilt ist, und solche gleich stark anspannet, so würdet beiderseits sowohl an den grossen als kleinen Durchmesser des Wellbaums eine Last = 36. nun aber sind beide Teile des Stricks auf eine entgegengesetzte Art aufgewunden, wie fig. 98. dem Durchschnit nach zusehen; folglich würden beide Teile der Last gegeneinander, und würden sich völlig aufheben, wenn die Radien FD und ID einander gleich wären; da sie aber ungleich sind, so hat die Last, so bei FH angebracht ist, und nach dieser Richtung zieht, eine grössere Gewalt als die andere, so nach der Richtung IG zieht. Es kommt also nur darauf an, zu finden, was für ein Teil der Last an FH die ganze andere an IG angebrachte im Gleichgewicht erhält, und wie viel folglich davon noch übrig bleibt? Derwegen betrachtet den Hebel FID der zweiten Art, wovon D der Ruhepunkt ist, so bekommt ihr $FD : ID = 36 : \text{zur Kraft an F}$; oder $3 : 2 = 36 : x = 24$. Da nun aber bei F auch eine Last = 36 angebracht ist, ein Teil davon aber nemlich 24 durch die Last bei IG im Gleichgewicht erhalten, und aufgehoben wird, so bleibt noch ein Teil davon nemlich 12 übrig, der das Ubergewicht hat, und folglich durch die Kraft P an dem Hebbaum erhalten werden mus. Um nun dies

Fig. 98.

diese zu finden, so schließet: $ED : FD = 12 : P$; oder weil $ED = 6$ Sch. ist, wie $72'' : 6'' = 12 : 1$. Folglich ist die Kraft $P = 1$ und die Last $Q = 72$, wie in der vorigen Berechnungsart, und es wird nicht schwer sein, daraus eine allgemeine Formel zu ziehen.

Um nun noch zu untersuchen, woher es komme, daß die Last nicht von freien stücken zurücksinke, wenn die Kraft zu wirken aufhöret, so betrachtet, daß die Last an FH eine grössere Gewalt als an GI habe, daß daselbst das Ubergewicht $= 12$ ware, und folglich, wenn die Maschine keine Reibung hätte, daß die Last schlechterdings zurücksinken müste. Da aber an verschiedenen Theilen der Maschine eine beträchtliche Reibung geschieht, und dieselbe grösser als das an FH befindliche Ubergewicht, oder wenigsten demselben gleich ist, so mus auch die Maschine stehen bleiben. Aus dieser Ursach könnte es auch geschehen, daß, wenn man den kleinern Durchmesser der Wellen noch kleiner als $\frac{2}{3}$ des Größern machte, das Ubergewicht bei FH grösser als die Reibung der Maschine würde, und die Last zurücksinken müste. Ubrigens siehet man, daß die Reibung der Maschine, die sonst oft so schädlich und hinderlich ist, hier zum Nutzen angewendet wird.

So wie diese Maschine als ein Hebzeug um eine Last gerade in die Höhe zu heben angewendet werden kan, ist sie auch noch vorteilhaft zu gebrauchen, wenn eine Last auf Rollen, auf einem Schlitten, oder auf einem ordentlichen Wagen oder Fuhrwerk entweder auf einer horizontalen Ebene, oder über eine schief liegende Fläche durch eine geringe Kraft herbei geschafet werden

Fig. 99.

den sol. Es wird nemlich der oben beschriebene Welbaum C in solchen Falle nur an ein anderes Gestelle, welches ungefähr wie ABD eingerichtet werden, und auf Rollräder B und D stehen kan um es leichter von einem Orte zum andern bringen zu können, angebracht, und an einem in die Erde geschlagenen Pfahle E angebunden. Nebst dem kan man die Sprossen F und G an beiden Enden des Welbaumes ausser den beiden gerade stehenden Gestelsäulen AI anbringen, um eine doppelte Kraft anwenden zu können. Insbesondere kan diese Maschine in solchen Fällen sehr nützliche Dienste leisten, wenn Geschütze oder andere schwere Lasten über eine Unhöhe, oder über die Auffahrten sehr enger Befestigungswerke, wo man wegen Mangel des Raumes oder andern Umständen weder viele Leute anstellen, noch weniger aber sich der Pferde bedienen kan, gebracht werden sollen. Endlich hat diese Maschine noch den wesentlichen Vortheil, daß sie im Falle der Noth, wenn es nemlich sowohl an geschickten Arbeitern, an der Zeit, oder an anderer nöthiger Zugehör für eine andere Gattung eines künstlichen Hebezeuges, welcher die Kraft eben soviel vermehret, fehlet, von einem jeden Zimmerman und Schmide in kurzer Zeit verfertigt werden kan.

Von dem Kranich.

§. 301. Nebst dem beschriebenen Hebezeuge bedient man sich bei der Artillerie in Gieß und Zeughäusern öfters des sogenannten Kranichs um damit nicht allein schwere Lasten aufzuheben, sondern auch dieselbe freihangend herum zu wenden, und an einem andern Orte
wie-

wieder nieder zu lassen. Die Maschine wird nach den Umständen oft sehr verschieden eingerichtet. Bald geht der Strick, woran die Last hanget, nur gerade zu über die in A und B befestigte Flaschenscheiben; bald wird bei der erstern auch noch ein ordentlicher Flaschenzug angebracht; bald wird das eine Ende des Stricks, welches über B geht, nur um die Welle eines Haspels, daran die Kraft zieht, gewunden; bald aber wird anstatt diesem an der Welle ein sogenanntes Tretrad angebracht, in welchen ein oder zweien Menschen herumgehen, und durch ihr Gewicht das Rad und die Welle bewegen, und den Strick mit der Last aufwinden. Ofters wird auch anstatt diesem eine Welle mit einem oder mehreren eisernen Stiernrädern D und Getrieben oder mit einer Schraube ohne Ende C versehen. Die Berechnung des Verhältnisses der Kraft zur Last hat sich alsdenn auch nach der eigentlichen Einrichtung der Maschine zu richten. Das Gestel wird ebenfalls, nachdem es gros oder stark sein sol, auf verschiedene Art angeordnet. Man hat aber dabei hauptsächlich zu sehen, daß der Balken AB stark genug sei, gehörig unterstützet werde, und daß sich die geradstehende Saule, woran eigentlich das ganze Bauwerk der Maschine befestiget wird, auf ihren Zapfen I und L bequem und so weit herum drehen lasse, als die Umstände erfordern.

Fig. 100.

Von dem sogenannten Hebel von Garuß.

§. 302. Jene Maschine, so unter dem Namen als Hebel von Garuß bekannt ist, kan nicht minder zur vorteilhaften Bewegung schwerer Lasten in einigen Fällen mit Nutzen angewendet werden.

Fig. 101.

Es besteht aber derselbe hauptsächlich aus einer Welle A, worauf sich der Strick mit der Last aufwindet; aus einem an eben dieselbe befestigten Sternrad B, dessen Zähne wie die an einem Sper oder Stelrade nach einer Seite zu schief eingeschnitten sind; aus einer Hebelstange CD die sich um den Ruhepunkt O bewegen läßt, und an deren beiden Enden die bewegende Kraft angebracht wird; und aus zween eisernen Hacken am, und an, die auf beiden Seiten des Ruhepunkts O an der Hebelstange dergestalt befestiget sind, daß sie sich an derselben frei herum bewegen können; ihre untere Ende m und n liegen dergestalt auf dem Rade auf, daß, wenn die Hebelstange auf und nieder bewegt wird, und mit ihren Enden die Bögen CI und DG beschreibt, einer derselben immer wechselweise über einige Zähne hinab glitschet, indem der andere in einen Zahn eingreift, und das Rad eben soweit nach sich zieht, als der andere geglitschet ist, folglich die Last an der Welle einen gewissen Teil aufgewunden wird. Das Rad wird gemeiniglich nur aus über das Kreuz gelegten und übereinander genagelten Brettern zusammengesetzt, und zwischen derselben äussern Rande ein etwas breiter eiserner Zirkel, in welchen die Zähne eingeschnitten sind, dergestalt eingelassen, daß nur die Zähne allein vorstehen. Das übrige vom Gestelle ist meistens willkürlich, und richtet sich nach den Umständen.

Damit aber die an beiden Enden der Hebelstange angebrachten Kräfte mit gleicher Gewalt wirken können, so ist überhaupt folgendes zu beobachten. Item: Erwählet die zween Zähne f und g, in welche ihr die Hacken eingreifen lassen wollet, wenn die Hebelstange sich eben im horizontalen Stande EF befindet; nur mit der Vorsicht, daß ihr f nicht unter der horizontalen MA setzet, weil der Hacken durch sein eigen Gewicht
nicht

nicht mehr leicht von sich selbst in die Zähne einfallen würde; und daß g so viele Zähne von f aufwärts angenommen werde, daß ein Hacken dem andern im abglitschen nicht hindere. 2ten: Ziehet die Radien fA und gA , und fällt auf dieselben aus f und g die Perpendikulare fh und gp , so werden diese die Richtungslinien, nach welchen die beiden Hacken wirken, vorstellen; nicht minder errichtet auch auf LN eine Perpendikular lr , so durch den Mittelpunkt des Rades oder der Welle gehet. 3ten: Erwählet nun nach einer beliebigen Art auf lr einen Punkt O , der eben eine solche Lage hat, daß die von demselben auf die Richtungslinien fh und gp gezogenen Perpendikulare Ob und Oc von gleicher Länge werden, und ziehet EF durch O parallel zu LN ; so wird EF den horizontalen Stand der Hebelstange; O die Stelle ihres Ruhepunkts; die Durchschnittpunkten i und e von EF , fh und gp die Entfernung, in welchen beide Hacken von dem Ruhepunkt O an der Hebelstange befestiget müssen werden, damit die an beiden Enden angebrachte Kraft mit gleicher Leichtigkeit arbeiten könne; anzeigen.

Um nun auch noch zu wissen, wie groß die Kraft sein mus, welche an die Ende der Hebelstange angebracht mit einer gewissen an dem Strick sich um die Welle aufwindenden Last im Gleichgewicht stehet, so betrachtet, daß die an einen Zahne des Rades wirkende Kraft zu der sich an der Welle aufwindenden Last: wie $As : Af$ seie. §. 231. ferner da der Hebel EO oder FO von der zwoten Art ist, §. 211. und die Last schief in denselben wirkt, daß die an das Ende des Hebels angebrachte Kraft zu der an einen der Hacken wirkenden Last wie $Ob : EO$ oder wie $Oc : FO$ seie. §. 224. Derowegen also ist $P : Q = As \times Ob : Af \times EO$, oder $P : Q = As \times Oc : Af \times FO$.

D. i.

oder die Kraft dieser 4 Menschen wird mit einer Last von 60 Centnern im Gleichgewicht stehen.

Auf eine ähnliche Art hätte man mit der Berechnung zu verfahren, wenn anstatt der Sprossen ein Stiernrad und Getrieb, oder eine Schraube ohne Ende u. d. gl. angebracht wären.

Eine andere sehr einfache und nußbare Art eines solchen Hebzeuges ist folgende: das Gestell ist überhaupt wie in dem vorigen beschaffen, nur werden oben zwei unbewegliche Flaschenscheiben A, B neben einander und in C eine bewegliche angebracht um den Strick die nöthige Richtung zu geben. Die Länge des Wellbaums ist in zweien Theile geteilet, und der eine hat einen größern Durchmesser als der andere, so zwar daß der kleinere nur $\frac{2}{3}$ von dem größern ist. Beide Ende des Stricks werden und zwar eines an dem dickern, und das andere an dem dünnern Teil befestiget, aber auf dieselbe verkehrt aufgewickelt, so daß wenn der Wellbaum umgedrehet wird, und die Last gehoben werden sol, der Strick sich an dem dicken Teil auf, und an dem dünnern abwinden mus; sol man aber die Last sinken lassen, so geschieht es umgekehrt. Nebst deme daß die Kraft durch diese Maschine vermehret wird, hat sie auch noch die besondere Eigenschaft, daß die Last nie für sich zurücksinkt, wenn auch gleich die an den Sprossen angebrachte Kraft zu wirken aufhöret. Man hat also dabei kein sogenantes Stell oder Sperrade mit seinem Einsalhacken nöthig wie in dem vorigen Hebzeuge. Um zu wissen wie viel die Kraft an dieser Maschine vermehret wird, kan man sich einer der folgenden Berechnungsarten bedienen:

Erste Art: Da jede zusammengesetzte Maschine Fig. 98. aus mehreren in einander wirkenden Hebeln bestehend angesehen werden kan §. 264. und in diesen die Kraft zur Last sich wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten oder die Wege, so sie in gleicher Zeit beschreiben, verhält, §. 219 u. 267. so hat man auch nur diese Geschwindigkeiten folgender Maassen zu suchen, nemlich: es seie die Länge ED des Sprossens oder Hebbaums bis in den Mittelpunkt der Welle = 6 Sch. der grössere Durchmesser der Welle = 12 Zoll, und der kleinere = 8 Zoll. Drähet sich nun der Welbaum einmal um, so beschreibet die in E angebrachte Kraft P einen Umkreis, der ED zum Radius hat, und den wir also um die Brüche zu vermeiden = 36 Sch. annehmen wollen, und der zugleich die Geschwindigkeit der Kraft ausdrückt. In eben dieser Zeit windet sich der Strick auf dem dicken Teil des Welbaums, der 12 Zoll zum Durchmesser hat, 3 Sch. auf, und von dem kleinern, der 8 Zoll ist, 2 Sch. ab; da es aber einerlei Strick ist, so kan sich dort nicht mehr auf, und hier nicht weniger abwinden, ohne daß der Teil, an welchen die Last hanget, um so viel verkürzt würde, als sich an dem einen in eben der Zeit weniger abwindet, so ist klar, daß der Strick sich hier um 1 Schuh verkürze; weil aber diese Verkürzung in beide Teile L und M vertheilet werden mus, indem er doppelt ist, so wird ieder nur um 6 Zoll verkürzt, folglich beschreibet die Flaschenscheibe C mit der daran hangenden Last Q in der nemlichen Zeit, als die Kraft einmal herumgeht, nur 6 Zoll. Daher verhält sich auch die Geschwindigkeit der Last zur Geschwindigkeit

Fig. 97.

der Kraft wie 6 Zoll zu 36 Sch. oder wie 1 : 72, und also auch die Kraft zur Last, d. i. $P : Q = 1 : 72$. S. 219 u. 267.

Zwote Art: Nehmet die vorigen Maassen an, und betrachtet, daß die Last $Q = 72$ durch die bewegliche Flaschenscheiben C bis auf die Hälfte, nemlich auf 36 vermindert werde, S. 244. Da aber diese Last in beide Stricke L und M gleichsam vertheilt ist, und solche gleich stark anspannet, so würdet beiderseits sowohl an den grossen als kleinen Durchmesser des Wellbaums eine Last = 36. nun aber sind beide Teile des Stricks auf eine entgegengesetzte Art aufgewunden, wie fig. 98. dem Durchschnitt nach zusehen; folglich würden beide Teile der Last gegeneinander, und würden sich völlig aufheben, wenn die Radien FD und ID einander gleich wären; da sie aber ungleich sind, so hat die Last, so bei FH angebracht ist, und nach dieser Richtung zieht, eine grössere Gewalt als die andere, so nach der Richtung IG zieht. Es kommt also nur darauf an, zu finden, was für ein Teil der Last an FH die ganze andere an IG angebrachte im Gleichgewicht erhält, und wie viel folglich davon noch übrig bleibt? Derowegen betrachtet den Hebel FID der zwoten Art, wovon D der Ruhepunkt ist, so bekommt ihr $FD : ID = 36 : \text{zur Kraft an F}$; oder $3 : 2 = 36 : x = 24$. Da nun aber bei F auch eine Last = 36 angebracht ist, ein Teil davon aber nemlich 24 durch die Last bei IG im Gleichgewicht erhalten, und aufgehoben wird, so bleibt noch ein Teil davon nemlich 12 übrig, der das Ubergewicht hat, und folglich durch die Kraft P an dem Hebbaum erhalten werden mus. Um nun dies

Fig. 98.

diese zu finden, so schliesst: $ED : FD = 12 : P$; oder weil $ED = 6$ Sch. ist, wie $72'' : 6'' = 12 : 1$. Folglich ist die Kraft $P = 1$ und die Last $Q = 72$, wie in der vorigen Berechnungsart, und es wird nicht schwer sein, daraus eine allgemeine Formel zu ziehen.

Um nun noch zu untersuchen, woher es komme, daß die Last nicht von freien Stücken zurücksinke, wenn die Kraft zu wirken aufhöret, so betrachtet, daß die Last an FH eine grössere Gewalt als an GI habe, daß daselbst das Übergewicht $= 12$ wäre, und folglich, wenn die Maschine keine Reibung hätte, daß die Last schlechterdings zurücksinken müste. Da aber an verschiedenen Theilen der Maschine eine beträchtliche Reibung geschieht, und dieselbe grösser als das an FH befindliche Übergewicht, oder wenigsten demselben gleich ist, so mus auch die Maschine stehen bleiben. Aus dieser Ursach könnte es auch geschehen, daß, wenn man den kleinern Durchmesser der Wellen noch kleiner als $\frac{2}{3}$ des Grössern machte, das Übergewicht bei FH grösser als die Reibung der Maschine würde, und die Last zurücksinken müste. Ubrigens sieht man, daß die Reibung der Maschine, die sonst oft so schädlich und hinderlich ist, hier zum Nutzen angewendet wird.

So wie diese Maschine als ein Hebezeug um eine Last gerade in die Höhe zu heben angewendet werden kan, ist sie auch noch vorteilhaft zu gebrauchen, wenn eine Last auf Rollen, auf einem Schlitten, oder auf einem ordentlichen Wagen oder Fuhrwerk entweder auf einer horizontalen Ebene, oder über eine schief liegende Fläche durch eine geringe Kraft herbei geschafft werden

Fig. 99.

den sol. Es wird nemlich der oben beschriebene Welbaum C in solchen Falle nur an ein anderes Gestelle, welches ungefähr wie ABD eingerichtet werden, und auf Räder B und D stehen kan um es leichter von einem Orte zum andern bringen zu können, angebracht, und an einem in die Erde geschlagenen Pfahle E angebunden. Nebst dem kan man die Sprossen F und G an beiden Enden des Welbaumes ausser den beiden gerade stehenden Gestellsäulen AI anbringen, um eine doppelte Kraft anwenden zu können. Insbesondere kan diese Maschine in solchen Fällen sehr nützliche Dienste leisten, wenn Geschütze oder andere schwere Lasten über eine Anhöhe, oder über die Auffahrten sehr enger Befestigungswerke, wo man wegen Mangel des Raumes oder andern Umständen weder viele Leute anstellen, noch weniger aber sich der Pferde bedienen kan, gebracht werden sollen. Endlich hat diese Maschine noch den wesentlichen Vortheil, daß sie im Falle der Noth, wenn es nemlich sowohl an geschickten Arbeitern, an der Zeit, oder an anderer nöthiger Zugehör für eine andere Gattung eines künstlichen Hebezeuges, welcher die Kraft eben soviel vermehret, fehlet, von einem jeden Zimmerman und Schmide in kurzer Zeit verfertigt werden kan.

Von dem Kranich.

S. 301. Nebst dem beschriebenen Hebezeuge bedient man sich bei der Artillerie in Gieß und Zeughäusern öfters des sogenannten Kranichs um damit nicht allein schwere Lasten aufzuheben, sondern auch dieselbe freihangend herum zu wenden, und an einem andern Orte
wie

wieder nieder zu lassen. Die Maschine wird nach den Umständen oft sehr verschieden eingerichtet. Bald geht der Strick, woran die Last hanget, nur gerade zu über die in A und B befestigte Flaschenscheiben; bald wird bei der erstern auch noch ein ordentlicher Flaschenzug angebracht; bald wird das eine Ende des Stricks, welches über B geht, nur um die Welle eines Haspels, daran die Kraft zieht, gewunden; bald aber wird anstatt diesem an der Welle ein sogenanntes Tretrad angebracht, in welchen ein oder zweien Menschen herumgehen, und durch ihr Gewicht das Rad und die Welle bewegen, und den Strick mit der Last aufwinden. Ofters wird auch anstatt diesem eine Welle mit einem oder mehreren eisernen Stiernrädern D und Getrieben oder mit einer Schraube ohne Ende C versehen. Die Berechnung des Verhältnisses der Kraft zur Last hat sich alsdenn auch nach der eigentlichen Einrichtung der Maschine zu richten. Das Gestel wird ebenfalls, nachdem es groß oder stark sein sol, auf verschiedene Art angeordnet. Man hat aber dabei hauptsächlich zu sehen, daß der Balken AB stark genug sei, gehörig unterstützet werde, und daß sich die geradstehende Säule, woran eigentlich das ganze Bauwerke der Maschine befestiget wird, auf ihren Zapfen I und L bequem und so weit herum drehen lasse, als die Umstände erfordern.

Fig. 100.

Von dem sogenannten Hebel von Garuß.

§. 302. Jene Maschine, so unter dem Namen als Hebel von Garuß bekannt ist, kan nicht minder zur vorteilhaften Bewegung schwerer Lasten in einigen Fällen mit Nutzen angewendet werden.

Fig. 101.

Es besteht aber derselbe hauptsächlich aus einer Welle A, worauf sich der Strick mit der Last aufwindet; aus einem an eben dieselbe befestigten Sternrad B, dessen Zähne wie die an einem Sper oder Stelrade nach einer Seite zu schief eingeschnitten sind; aus einer Hebelstange CD die sich um den Ruhepunkt O bewegen läßt, und an deren beiden Enden die bewegende Kraft angebracht wird; und aus zween eisernen Haken am, und an, die auf beiden Seiten des Ruhepunkts O an der Hebelstange dergestalt befestiget sind, daß sie sich an derselben frei herum bewegen können; ihre untere Ende m und n liegen dergestalt auf dem Rade auf, daß, wenn die Hebelstange auf und nieder bewegt wird, und mit ihren Enden die Bögen CI und DG beschreibt, einer derselben immer wechselweise über einige Zähne hinab glitschet, indem der andere in einen Zahn eingreift, und das Rad eben soweit nach sich zieht, als der andere geglitschet ist, folglich die Last an der Welle einen gewissen Teil aufgewunden wird. Das Rad wird gemeiniglich nur aus über das Kreuz gelegten und übereinander genagelten Brettern zusammengesetzt, und zwischen derselben äußern Rande ein etwas breiter eiserner Zirkel, in welchen die Zähne eingeschnitten sind, dergestalt eingelassen, daß nur die Zähne allein vorstehen. Das übrige vom Gestelle ist meistens willkürlich, und richtet sich nach den Umständen.

Damit aber die an beiden Enden der Hebelstange angebrachten Kräfte mit gleicher Gewalt wirken können, so ist überhaupt folgendes zu beobachten. Item: Erwählet die zween Zähne f und g, in welche ihr die Haken eingreifen lassen wollet, wenn die Hebelstange sich eben im horizontalen Stande EF befindet; nur mit der Vorsicht, daß ihr f nicht unter der horizontalen MA setzet, weil der Haken durch sein eigen Gewicht
nicht

nicht mehr leicht von sich selbst in die Zähne einfallen würde; und daß g so viele Zähne von f aufwärts angenommen werde, daß ein Haken dem andern im abglitschen nicht hindere. 2ten: Ziehet die Radien fA und gA , und fället auf dieselben aus f und g die Perpendikulare fh und gp , so werden diese die Richtungslinien, nach welchen die beiden Haken wirken, vorstellen; nicht minder errichtet auch auf LN eine Perpendikular lr , so durch den Mittelpunkt des Rades oder der Welle gehet. 3ten: Erwählet nun nach einer beliebigen Art auf lr einen Punkt O , der eben eine solche Lage hat, daß die von demselben auf die Richtungslinien fh und gp gezogenen Perpendikulare Ob und Oc von gleicher Länge werden, und ziehet EF durch O parallel zu LN ; so wird EF den horizontalen Stand der Hebelstange; O die Stelle ihres Ruhepunkts; die Durchschnittpunkten i und e von EF , fh und gp die Entfernung, in welchen beide Haken von dem Ruhepunkt O an der Hebelstange befestiget müssen werden, damit die an beiden Enden angebrachte Kraft mit gleicher Leichtigkeit arbeiten könne; anzeigen.

Um nun auch noch zu wissen, wie groß die Kraft sein mus, welche an die Ende der Hebelstange angebracht mit einer gewissen an dem Strick sich um die Welle aufwindenden Last im Gleichgewicht stehet, so betrachtet, daß die an einen Zahne des Rades wirkende Kraft zu der sich an der Welle aufwindenden Last: wie $As : Af$ seie. §. 231. ferner da der Hebel EO oder FO von der 2ten Art ist, §. 211. und die Last schief in denselben wirkt, daß die an das Ende des Hebels angebrachte Kraft zu der an einen der Haken wirkenden Last wie $Ob : EO$ oder wie $Oc : FO$ seie. §. 224. Derowegen also ist $P : Q = As \times Ob : Af \times EO$, oder $P : Q = As \times Oc : Af \times FO$.

D. i.

D. i. die an einem Ende der Hebelstange angebrachte Kraft verhält sich zu der an der Welle sich aufwindenden Last, wie das Produkt aus dem Radius der Welle und der Perpendicular, so aus dem Ruhepunkt des Hebels auf die Richtungslinie eines Hakens gezogen wird, zum Produkt aus dem Radius des Rades und der Länge des Hebelarms.

Diese Maschine läßt sich zwar zur Aufhebung oder Bewegung schwerer Lasten anwenden, sie hat aber die wesentliche Unbequemlichkeit an sich, daß ein bereits aufgehobene, und an dem Strick hangende Last nicht wieder zurückgelassen werden kan ohne mit der Hand einen Haken nach dem andern immer fort aus den Zähnen des Rades zu heben. Um also dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, ist durch einen Tischlermeister in Inspruck, dessen Namen mir unbekant, folgende Verbesserung erdacht worden.

Fig. 102.

Das Rad und die Welle verbleiben unverändert, und die Ruhepunkten O, e, i, der Hebelstange, und der beiden Haken werden wie zuvor bestimmt. Die Hebelstange ist hier auf einer Seite abgenommen, weil man, wenn man wil, die Kraft auch nur auf einer Seite anbringen, und wirken lassen kan.

Die beiden Eisenstangen pg, und ef, welche in der vorigen Figur als Haken in die Zähne des Rades eingreifen, und es nach sich ziehen, greifen hier auf der andern Seite in dieselben ein, und schieben im Aufziehen das Rad von sich; aus dieser Ursache könnte man sie zum Unterschied von den vorigen eigentlich Schiebstanen nennen; wiewohl ihre Wirkung im übrigen von den andern nicht
unter

unterschieden ist. Damit sich aber diese Schieb-
stangen beim zurücklassen der Last wechselweise selbst
auslösen, so werden sie über i und e hinaus et-
was verlängert, und an jede ein Gewicht a und b
von erforderlicher Schwere angebracht, welches
mit einem beweglichen Gliede versehen wird, da-
mit man sie auch in die Stellung d und c hin-
über legen kan. Ferner sind zwei Federn und
zwar eine n an der Hebelstange, die andere m
aber an einem von einer schrägen Stütze zur andern
angebrachten Querbalken dergestalt befestiget, daß
sie mit ihren äußern Enden die Schiebstangen da-
mals wenn die Hebelstange im horizontalen Stan-
de OF ist, noch nicht gar berühren.

Ist nun mittelst einer solcher Gestalt eingerich-
ten Maschine eine Last aufzuheben, oder über eine
horizontale oder schiefe Fläche herbei zu ziehen,
so werden beide Gewichte in die Stellung a und
 b gelegt, und die Hebelstange in Bewegung ge-
bracht, damit ihr Ende wechselweise den Bogen
 DG beschreibe; so werden beide Schiebstangen
das Rad wie in der vorigen Maschine herum be-
wegen, und andurch der Strick an der Welle auf-
gewunden werden; nur wird die Kraft in diesem
Falle auch noch den Widerstand der Federn, wenn
sie nemlich von den Schiebstangen berührt wer-
den, und solche noch mehr gegen die Zähne drü-
cken, zu überwältigen haben; weil aber diese Fe-
dern nicht stärker sein dürfen, als daß sie den Wi-
derstand der Gewichte a und b überwinden kön-
nen, so wird die Kraft durch sie gar nicht be-
trächtlich gehindert werden. Sol aber die bereits
gehobene Last wieder nachgelassen werden, so sind
die Gewichte in die Stellung d und c zu bring-
en.

gen. Die Hebelstange wird alsdenn von F gegen G etwas weniges bewegt, damit die Schieb-
 stange gp durch das Gewicht d das Ubergewicht
 bei p bekomme, und sich dadurch selbst aus den
 Zähnen löse. Bewegt man alsdenn den Hebel
 aufwärts gegen D , so wird die Schieb-
 stange fb mit in die Höhe gezogen, der Zahn, worein sie
 eben greift, folgt ihr nach, das Rad bewegt
 sich also auch mit samt der Welle herum, und
 dadurch wird der Strick abgewunden, und die Last
 nachgelassen. Indessen gehet die andere Schieb-
 stange gp ler, bis sie, da die Hebelstange schon
 gegen D kommt, durch die Feder m wieder in die
 Zähne gedrückt wird; wo aber die andere fc zu
 gleicher Zeit durch das Gewicht c das Uberge-
 wicht bekommt, sich aus den Zähnen löset, und
 während der Bewegung der Hebelstange von D gegen
 G ler gehet, indem die andere gp damals in die
 Zähne eingreift, ihr das Rad nachfolget, und
 folchergestalt die Last wie zuvor ferner nachgelassen
 wird. u. s. w.

Ubrigens wird der Hebel von Garuß gewöhn-
 licher Weise auch bei Bretermühlen gebraucht,
 um das Gestel, worauf die Bäume, welche in
 Bretter zerschnitten werden sollen liegen, nach und
 nach an die Säge anzurücken.





Drittes Hauptstück.

Von der Reibung der Maschinen.

Von der Reibung überhaupt.

Erklärung.

§. 303. Die Erfahrung lehret, daß sich kein Körper so vollkommen eben und glat machen lasse, daß nicht an seinen Flächen noch eine menge Ungleichheiten, d. i. Erhöhungen oder Vertiefungen vorhanden wären. Man erhält davon die überzeigendsten Proben, wenn man Körper, die am glatesten zu sein scheinen, mit Vergrößerungsgläsern betrachtet. Es ist daher leicht begreiflich, daß zween Körper, die sich mit ihrem Flächen berühren, und übereinander hinweg bewegt werden, einen gewissen besondern Widerstand verursachen, weil sich die an der Fläche herfürragende Teile des einen in die Vertiefungen der Fläche des andern hinein setzen, und nicht eher über einander hinweg gezogen werden können, bis die erstere nicht über die letztere heraus und folglich etwas in die Höhe steigen, oder die vorragenden Teile niedergebogen, oder gar abgebrochen oder ausgerissen werden. Dieser daher rührende Widerstand wird insgemein die Reibung genent.

Z u s a z.

§. 304. Die Größe der Reibung ist in verschiedenen Körpern, und in verschiedenen Umständen oft verschieden, und hanget hauptsächlich von folgenden ab:

1. Von der mehreren oder wenigern Unebenheit der sich berührenden Flächen.

2. Von der Grösse des Drucks, welchen die sich berührenden Flächen von der darauf ruhenden Last auszustehen haben.

3. Von der Grösse der sich berührenden Flächen, aber nur in dem Falle, wenn dieselben so genau aufeinander liegen, daß keine Luft dazwischen ist, und also der Druck unsers Dunstkreises (Athmosphæra) in Betrachtung kommt.

4. Von der Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung geschieht.

5. Von der Nässe und Trockenheit der sich reibenden Flächen.

6. Endlich von der Beschaffenheit der Materien selbst; d. i. von ihrer Härte oder Weiche, Biegsamkeit oder Spröte.

Da diese Umstände in den Körpern sehr verschieden angetroffen werden, und auch für sich sehr veränderlich sind, so ist leicht zu erachten, daß sich in Ansehung der Grösse der Reibung nichts allgemeines festsetzen lasse. Um aber die Anfänger dennoch einiger Massen in Stande zu setzen die an den Maschinen vorkommenden Reibungen beurtheilen zu können, so geben wir ihnen folgende kurze Anleitung.

Aufgabe.

§. 305. Wie die Grösse der Reibung eines auf einer Fläche liegenden Körpers durch die Erfahrung zu bestimmen.

Auf-

Auflösung: 1. Richtet die Fläche, AB mit welcher ihr den Versuch machen wollet, so ein, daß ihr sie mit dem Horizont AC verschiedentlich und nach Belieben schief stellen könnet, und stellet den vorhabenden Körper L mit einer seiner Flächen darauf. Fig. 103.

2. Erhebet die Fläche an einem Ende B nach und nach eben so hoch, bis der Körper L von sich selbst hinab zu glitschen anfangt.

3. Messet hierauf die Länge AB und auch die Höhe BC der schiefen Fläche, und saget: wie sich die Länge AB der schiefen Fläche zur Höhe BC verhält, eben so verhält sich die ungebundene Schwere des Körpers L zu der Reibung, welche durch seine Bewegung auf der Fläche entsteht.

Beweis: Bildet euch ein, als ob aus dem Schwerpunkt D des Körpers eine Perpendikular DE auf AC, und eine andere DF auf AB gezogen, und DG und EF parallel zu AB, GE aber parallel zu DF geführt wäre. Drückt man nun durch die senkrechte Linie DE die ungebundene Schwere des Körpers aus, so läßt sich durch die Linie DF der Druck, welchen er gegen die schiefe Fläche ausübet, vorstellen; und DG zeigt alsdenn die gebundene Schwere, oder jene Kraft an, mit welcher der Körper über die schiefe Fläche herab zu glitschen anfangt. Es kan aber derselbe bei der Erhebung der Fläche nicht eher zu glitschen anfangen, bis nicht seine gebundene Schwere DG der auf der Fläche entstehenden Reibung zum wenigsten gleich wird, und damals kan man DG für die Grösse der Reibung selbst annehmen. Nun aber ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecken EDG und ABC.

$$AB : BC = DE : DG$$

$$AB : AC = DE : EG$$

$$\text{und } AC : BC = EG : DG.$$

Daraus erhellet also, daß, wenn man die Länge AB die Höhe BC und die Grundlinie AC der schief liegenden Fläche worüber der Körper eben herab zu glitschen anfängt, nebst der ungebundenen Schwere des Körpers bekannt hat, man sowohl die Grösse seiner Reibung DG

$$= \frac{BC \times DE}{AB} \text{ oder } DG = \frac{BC \times EG}{AC}, \text{ als die Grösse}$$

des Druckes EG = $\frac{AC \times DE}{AB}$, welchen er gegen die schiefe Fläche ausübet finden könne.

Z u s a z.

§. 306. Ist die Schwere eines Körpers DE nebst der Grösse der Reibung DG auf einer Fläche einmal bekannt, und man verlangt zu wissen, welchen Winkel die schiefe Fläche mit dem Horizont machen müsse, damit der Körper hinab zu glitschen eben bereit sei, so setzet

$DE : DG = \sin \text{ tot} : \sin \text{ DEG} = \text{BAC}$,
oder wäre das Verhältniß der Reibung zu dem Druck gegen die Fläche gegeben, so wäre

$$EG : DG = \sin \text{ tot} : \tan \text{ GED} = \text{BAC}.$$

Z u s a z.

§. 307. So wie der Winkel BAC spitziger gemacht wird, oder die Fläche AB sich der Horizontal AC mehr nähert, so wird auch der Druck $DF = GE$ gegen die schiefe Fläche grösser, oder nähert sich der ungebundenen Schwere des Körpers; und wird endlich die Fläche AB ganz horizontal gestellt, so ist der Druck gegen dieselbe der ungebundenen Schwere selbst gleich. Was man also für ein Verhältniß der Reibung zum Druck gegen die Fläche bei der schiefen Stellung der Fläche, bei welcher der Körper hinab zu glitschen anfängt, gefunden hat, eben dieses wird nun
auch

auch bei der horizontalen Stellung staat haben: D. i. hat die Reibung in der schiefen Stellung, in welcher der Körper eben hinab zu glitschen anfangt, z. B. $\frac{1}{3}$ von dem Druck EC betragen, so wird nun die Reibung in der horizontalen Stellung $\frac{1}{3}$ von der ungebundenen Schwere ausmachen.

Ubrigens lehret die Erfahrung, daß die GröÙe der Reibung bei den meisten Körpern oder Materien, welche gewöhnlicher Weise zu Maschinen gebraucht werden, wenn sie nicht besonders wohl polirt sind, fast allezeit bei nahe ein Drittel ihres Drucks gegen die Fläche betrage. Daher man auch diese Verhältnis in den Berechnungen der Reibung gemeiniglich annimmt.

Aufgabe.

§. 308. Wie die Kraft zu berechnen, welche erfordert wird, eine auf einer horizontalen Ebene ruhende Last in Bewegung zu setzen?

Auflösung: Wenn eine Last L auf einer horizontalen Fläche GH ruhet, und eine Kraft K dieselbe nach einer zu dem Horizont parallelen Richtung zu bewegen sucht, so hat dieselbe hier nichts als die Reibung allein zu überwinden. Da nun dieselbe nach §. 307. dem dritten Teil der Last ausmachet, so mus auch K

$= \frac{L}{3}$ sein, wenn sie das Gleichgewicht halten, und so sie ein wenig vermehrt wird, die Last in Bewegung setzen können sol.

Z u s a z.

§. 309. Da §. 304. gesagt worden, daß die Reibung hauptsächlich von dem Druck, den die Flächen aus-

auszustehen haben, und nicht von der Größe der Flächen abhängen, wenn nicht etwa dasjenige, was eben daselbst Nr. 3. gemeldet worden, statt findet; so ist es einerlei, ob der Körper mit der grössern Fläche $ABDC$ oder kleinern $ABFE$ auf der untern Fläche aufliege; weil die wenigen Punkten der kleinern Fläche um so stärker gegen die untere Fläche gedrückt werden, und daher eben soviel Widerstand als die mehrere der grössern Fläche verursachen.

Aufgabe.

§. 310. Wie die Kraft zu berechnen, welche sowohl der Schwere einer vertikalen Fläche, als auch der durch einen Seitendruck entstehenden Reibung das Gleichgewicht halten sol?

Fig. 105. Auflösung: Wenn eine schwere vertikal stehende Fläche L an eine andere Fläche durch eine Kraft P perpendicular angeedrückt wird, so hat die Kraft K so das Gleichgewicht halten sol, nicht allein die Schwere L sondern auch die von dem Druck P herrührende Reibung zu überwinden, ist nun das Verhältnis der Reibung zu dem Drucke bekannt, oder durch die Erfahrung bestimmt, und z. B. $= \frac{P}{3}$, so ist $K = L + \frac{P}{3}$.

Aufgabe.

§. 311. Wie die Kraft zu berechnen, welche einen Körper zwischen zwei parallelen Flächen heraus ziehen, und folglich die daher entstehende Reibung überwinden sol?

Fig. 106. Auflösung: Wenn ein Körper L von einer Kraft K zwischen den zwei parallelen Flächen A und D hervorgezogen werden sol, so daß die Obere wegen der

bar.

darauf ruhenden Last B' und A zugleich auf ihn drückt, so entstehen zwei Reibungen die von der Kraft K zu überwinden sind; und zwar ist die untere Reibung wenn wir sie wie S. 307. gemeldet worden, für ein Drittel des Drucks annehmen, $\frac{L + A + B}{3}$ und die

obere $= \frac{A + B}{3}$, weil nun die Kraft nichts als diese zu überwinden hat, so ist $K = \frac{L + 2A + 2B}{3}$

Aufgabe.

§. 312. Wie die Reibung zu berechnen, wenn ein Körper an einem Hebel auf einer horizontalen Fläche in die Runde herum bewegt werden sol?

Auflösung: Wenn eine Last L an dem Ende A eines Hebels, und eine Kraft K an dem andern Ende B angebracht ist, welche die erstere auf einer horizontalen Fläche um den Ruhepunkt C bewegen sol, so hat man um die Reibung zu bestimmen, nicht allein auf den Druck der Last gegen die Fläche, sondern auch auf die Geschwindigkeit, so die Kraft und Last gegen einander haben, oder vielmehr auf die Länge ihrer Hebelarme zu sehen; denn so wie die Kraft sich geschwinder oder langsamer als die Last bewegt, oder so wie der Hebelarm CB derselben länger oder kürzer als der andere AC ist, so wird auch die Kraft das für die Reibung gewöhnlich gerechnete Drittel des Drucks der Last leichter oder schwerer überwinden, und man kan sehen, daß

$$CB : AC = \frac{L}{3} : \frac{AC \times L}{3CB} \text{ seie;}$$

wovon der letzte Satz die Kraft ausdrückt, welche erforderlich ist, dem Körper L zu bewegen.

Aufgabe.

§. 313. Wie die Grösse der Reibung zu berechnen, wenn ein Cylinder mit seiner Grundfläche auf einer horizontalen Fläche liegt, und durch Hülfe einer Kurbel um seine Achse in die Runde bewegt wird?

Fig. 108. Auflösung: Betrachtet, daß die verschiedenen Teile des Cylinders L bei seiner Herumdrähung eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit erhalten, nachdem der Radius des Umkreises, den sie im Umlaufen beschreiben, grösser oder kleiner ist; folglich daß die Reibung dieser Teilen auch stärker oder schwächer sein müsse, und daß die mittlere Proportional dieser verschiedenen Geschwindigkeiten oder Reibungen auf den Umkreis fallen, der mit einem Radius $CR = \frac{2AC}{3}$ beschrieben wird. Ausdenn ist es eben soviel, als wenn die ganze Last L an das Ende R des Hebels RB, die Kraft K aber an das andere Ende B angebracht wäre, und die Bewegung damit in die Runde geschähe, §. 312. folglich wenn man die Reibung des Cylinders gegen die Fläche wie meistens gewöhnlich für $\frac{1}{3}$ seiner Schwere annimmt, so ist:

$$CB : CR = \frac{L}{3} : \frac{CR \times L}{3CB},$$

wovon der letzte Satz jene Kraft ausdrückt, welche zur Überwindung der Reibung erfordert wird.

Aufgabe.

§. 314. Wie die Reibung des untern Zapfens eines senkrecht stehenden Welbaums zu berechnen.

Auf.

Auflösung: Betrachtet, daß die Reibung des Zapfens an der untern Pfanne von dem Drucke, oder der Schwere des Welbaumes herrühre, und daß es eben soviel sei, als ob ein Cylinder, dessen Radius dem Radius TO des Zapfens gleich ist, wie §. 313. durch die Kurbel oder durch die an den Hebel angebrachte Kraft K in die Runde bewegt würde. Da nun die sich reibende Teile der Last ebenfalls eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit und folglich auch Reibung erhalten, nachdem sie mehr oder weniger von dem Mittelpunkt O entfernt sind, so kan man hier ebenfalls die mittlere proportional Grösse der Reibung durch $\frac{2TO}{3}$ ausdrücken, und wenn man also setzt:

$$CA : \frac{2TO}{3} = \frac{L}{3} : \frac{2TO \times L}{9CA},$$

so drückt der letzte Satz die Kraft aus, welche der Reibung das Gleichgewicht halten kan.

Aufgabe.

§. 315. Wie die Reibung an den Lagerzapfen eines Wagebalkens zu finden?

Auflösung: Wenn an den Enden eines gleicharmigten Wagebalkens gleiche Lasten L und L angehangen werden, so werden die Zapfen oder der Ruhepunkt C nicht allein durch die beide Lasten, sondern auch noch von der Schwere m des Wagebalkens gedrückt, und die beide Lasten erhalten sich im Gleichgewicht. Wenn aber dieses durch Anhängung einer neuen Last K auf einer Seite überwunden werden sol, so mus dieselbe die an den Zapfen entstehende Reibung überwinden können. Hätten nun die Teile an der sich reibenden Fläche der Zapfen die nehmliche Geschwindigkeit, wie die

Fig. 109.

Fig. 110.

die am Ende des Wagebalkens angebrachte Last, so würde man auch den so vielen Teil des Drucks annehmen müssen, als dieselbe nach §. 307. betraget; weil aber die Geschwindigkeit der Last am Ende des Balkens zur Geschwindigkeit der sich reibenden Teile wie $CB : DC$ verhält, so verhält sich die Grösse der Reibung zur Last K , welche sie überwinden sol, eben so, d. i. wenn man z. B. die Grösse der Reibung $= \frac{L + L + m}{3}$ annimmt, so ist

$$CB : DC = \frac{L + L + m}{3} : K = \frac{(2L + m) \times DC}{3CB}.$$

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. III. §. 316. Wären die Arme AC und CB des Wagebalkens von ungleicher Länge, so würden auch die zwei angehangenen Lasten L und N ungleich sein müssen, wenn sie sich das Gleichgewicht halten sollen, nimmt man nun für die an den Zapfen fällende Reibung ebenfalls wieder $\frac{1}{3}$ des Druckes auf dieselben an, so ist eben wie zuvor

$$CB : DC = \frac{L + N + m}{3} : K = \frac{(L + N + m) \times DC}{3CB}$$

der Kraft, welche zu N hinzugethan, die Reibung zu überwinden im Stande ist.

A u f g a b e.

§. 317. Wie die Reibung zu berechnen, wenn die Zapfen einer stehenden Spindel nebst dem Druck auf den untern Zapfen, auch noch einen Seitendruck leiden?

Fig. II2. Auflösung: Wenn an einer senkrecht stehenden Welle ein Strick einige male umgewunden, und an beide Ende desselben zwei gleiche Lasten L und L dergestalt

stalt angebracht werden, daß sie beide nach einer Seite parallel ziehen, so gehen an den Zapfen der Welle eigentlich zweierlei Reibungen vor; nemlich erstlich an den Seitenflächen der Zapfen, nach welchen die zwei Läste ziehen; zweitens an dem Grund der Pfanne, wo der untere Zapfen aufruhet, und von der Schwere in der Welle gedrückt wird. Um die erste Reibung zu finden, hat man die Welle als einen gleicharmigten Hebel oder Wagebalcken zu betrachten, und folglich die Rechnung wie S. 315. anzustellen, doch ohne auf die Schwere der Welle zu sehen; und um die zweite Reibung zu bestimmen, hat man sich an das zu erinnern, was S. 314. gesagt worden. Setzen wir nun diesem zu folge voraus, daß z. B. die Reibung in beiden Fällen wieder $\frac{1}{3}$ des Drucks betrage, so ist für die

$$\text{erste } BF : CD = \frac{L+L}{3} : K = \frac{(L+L) \times CD}{3BF}$$

und für die andere

$$BF : \frac{2CD}{3} = \frac{m}{3} : O = \frac{2CD \times m}{9BF}$$

folglich wird die ganze Kraft, welche einer der beiden Läste L noch hinzugefüget werden mus, um der ganzen Reibung das Gleichgewicht zu halten $= K + O$

$$= \frac{L \times CD}{BF} + \frac{2CD \times m}{9BF} \text{ sein.}$$

Aufgabe.

S. 318. Wie die Reibung an einem Haspel, oder Rad an der Welle zu berechnen?

Auflösung: Um die Reibung eines Haspels oder Rad an der Welle zu berechnen, hat man erstlich zu betrachten, ob er horizontal oder vertikal stehet, und wie die Kraft und Last daran wirken. Ist er hori-

zontal

zontal, und sowohl die Last als Kraft würden abwärts und unter sich parallel, so hat man bei der Berechnung der Reibung alles das zu beobachten, was §. 316. erinnet worden ist. Ist es aber ein stehender Haspel, und sowohl die Last als Kraft drücken die Welle nach einer Seite, so hat man sich sowohl an §. 317. als 316. zu halten.

Aufgabe.

§. 319. Wie die Reibung an den Achsen einer unbeweglichen Flaschenscheibe zu berechnen?

Fig. 113. Auflösung: Man hat sich bei der Berechnung der Reibung, welche an den Haspeln oder Achsen einer unbeweglichen Flaschenscheibe vorgehet, überhaupt wie bei einem gleicharmigten Wagebalken zu benehmen §. 315. D. i. wenn L und L die zwei gleiche Lasten sind, welche über die Rolle hängen, m die Schwere der Rolle selbst, K diejenige Kraft ist, welche der Reibung das Gleichgewicht halten soll, und man nimmt wieder an, daß die Grösse der Reibung $\frac{1}{3}$ des Drucks, mit welchen die Achse beschweret wird, betrage, so ist:

$$AC : CD = \frac{L + L + m}{3} : K = \frac{(2L + m) \times CD}{3AC}.$$

Aufgabe.

§. 320. Wie die Reibung an einer beweglichen Flaschenscheibe, an welcher die Richtungen der Kraft und Last parallel laufen, zu berechnen?

Fig. 114. Auflösung: Betrachtet, daß der ganze Druck gegen die Achsen der Last L mehr der Schwere m der Rolle gleich sei, und daß hier die Kraft und Last an einem Hebel der zweiten Art angebracht sei. Derwegen ist erstlich wegen dem blossen Stand des Gleichge-

ge.

gewichts und ohne Betrachtung der Reibung, wenn CD der Radius der Achse der Rolle ist:

$$AB : AC = L : N = \frac{L \times AC}{AB}$$

und dann

$$AB : CD = \frac{L + m}{3} : K = \frac{(L + m) \times CD}{3AB}$$

nach §. 316., folglich mus

$$N + K = \frac{L \times AC}{AB} + \frac{(L + m) \times CD}{3AB}$$

sein, um sowohl der Last L als der an den Achsen der Flaschenscheiben entstehenden Reibung das Gleichgewicht zu halten.

Aufgabe.

§. 321. Wie die Reibung zu berechnen, welche an den Achsen und Naben der Räder eines Wagens vorgehet, wenn er auf einer horizontalen Ebene in paralleler Richtung zu derselben fortgezogen wird.

Auflösung: Betrachtet, daß bei Fortziehung eines Wagens auf einer horizontalen Ebene weiter nichts als die Reibung an den Achsen zu überwinden sei; da aber die Räder Hebel vorstellen, an welchen in A und D die Kraft, in B und E aber die Last oder der Widerstand der Reibung angebracht ist, und C und F die Ruhepunkten sind, so wird die Überwindung der Reibung dadurch ungemein erleichtert. Nimt man nun an, daß die Last L auf den vordern und hintern Rädern gleich ausgeteilet sei, und das die Reibung hier eben wieder $\frac{1}{2}L$ betrage, so kan man dieselbe in zween gleiche Teile teilen, und also $\frac{1}{4}L$ für die Reibung der vordern und $\frac{1}{4}L$ für eben dieselbe der hintern Räder annehmen, und erslich setzen:

Fig. 115.

AC:

$$AC : BC = \frac{L}{6} : \frac{K}{2} = \frac{L \times BC}{6AC}$$

$$\text{und dann } DF : EF = \frac{L}{6} : \frac{K}{2} = \frac{L \times EF}{6DF}$$

$$\text{folglich wird } K = \frac{L \times BC}{6AC} + \frac{L \times EF}{6DF}$$

die Kraft sein, welche eben im Stande ist der Reibung das Gleichgewicht zu halten.

Daraus ist also zu ersehen, daß ein Wagen um so leichter zu bewegen sei, als er grössere Räder, oder kleinere Achsen hat. Ist aber die Fläche, worauf der Wagen bewegt werden sol, uneben, oder gar nicht horizontal, so wurde man auch die Berechnung der Kraft anders anstellen müssen, und sich überhaupt an dasjenige zu halten haben, was wir von der Bewegung über schiefe Flächen §. 246. beigebracht haben, und noch folgen wird.

Aufgabe.

§. 322. Wie die Kraft zu berechnen, welche erfordert wird, wenn ein Körper über eine schiefe Fläche in paralleler Richtung zu derselben hinaufgezogen werden sol?

Fig. 116. Auflösung: Bildet euch ein, als ob aus dem Mittelpunkt L der Schwere des Körpers LD auf AH, und LS auf AB perpendicular gezogen wäre, und daß durch die Linie LS die ungebundene Last des Körpers ausgedrückt werde, so kan man, wenn FS parallel zu LD, und FL und DS parallel zu AH geführt wird, durch LD den Druck der Last gegen die schiefe Fläche, durch FL aber diejenige Kraft vorstellen, mit welcher
der

der Körper über die schiefe Fläche hinab zu glitschen suchen würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre. Damit nun die nach der Richtung LK wirkende Kraft K dem Körper eben das Gleichgewicht halten könne, muß sie der Kraft LF mehr der Reibung, so auf der Fläche entsteht, gleich sein; und um dieselbe zu finden, betrachtet, daß wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke sei:

$$\begin{aligned} AH : HB &= LS : LF \\ \text{und } AH : AB &= LS : LD \\ \text{folglich } \frac{LS \times HB}{AH} &= LF \\ \text{und } \frac{LS \times AB}{AH} &= LD \end{aligned}$$

nimmt man nun hier ebenfalls wie meistens gewöhnlich $\frac{1}{3}$ des Drucks der Last gegen die schiefe Fläche für die Reibung an, so ist

$$\frac{LS \times HB}{AH} + \frac{LS \times AB}{3AH} = K$$

der Kraft, welche vermögend ist, sowohl der Last L als ihrer Reibung auf der schiefen Fläche das Gleichgewicht zu halten.

Aufgabe.

§. 323. Wie die Kraft zu berechnen, so erfordert wird, wenn ein Körper über eine schiefe Fläche nach einer mit dem Horizont parallelen Richtung hinaufgezogen wird.

Auflösung: Bildet euch ein, daß die Parallelogrammen LFSD und LNOC dergestalt aus dem Schwerpunkt L des Körpers gezogen wären, daß LS perpendicular auf AB die ungebundene Schwere des Körpers; LD perpendicular auf AH, den Druck desselben gegen

Fig. 117.

238 III. Abschnitt. III. Hauptstück.

die schiefe Fläche; LF die Kraft, mit welcher der Körper noch über die schiefe Fläche hinabweichen würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre; LC den Druck, welcher wegen der schiefen Wirkung der Kraft K gegen die schiefe Fläche entsteht, und LN und LC die zusammengesetzten Kräfte ausdrücken, in welche die Kraft LO durch das Parallelogramm LNOC zerfällt wird; und daß man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke setzen könne

$$AH : BH = LS : LF$$

$$\text{und } AH : AB = LS : LD$$

folglich ist $\frac{LS \times BH}{AH} = LF$ der Kraft, welche den Körper ohne Reibung zum hinabweichen antreibt, und $\frac{LS \times AB}{AH} = LD$ dem Druck, welchen der Körper durch seine Schwere auf der Fläche verursacht.

$$\text{ferner ist } AH : AB = LO : LN$$

$$\text{und } AH : BH = LO : LC$$

$$\text{folglich ist } \frac{LO \times AB}{AH} = LN$$

$$\text{und } \frac{LO \times BH}{AH} = LC$$

dem Drucke, welchen die Kraft K wegen ihrer schiefen Richtung gegen die Fläche AH verursacht.

Nimmt man nun an, daß die Reibung, welche sowohl durch die Schwere des Körpers selbst, als durch die schiefe Richtung der Kraft K gegen die Fläche entsteht, $\frac{1}{3}$ des gesamten Drucks betrage, so bekommt man

$$\frac{LD + LC}{3} = \frac{LS \times AB}{3AH} + \frac{LO \times BH}{3AH}$$

für die gesamte Reibung.

Ferner schließt, daß, wenn der Körper L auf der schiefen Fläche AH sich aufwärts zu bewegen anfangen sol, die Kraft LN der Kraft LF mehr der gesamten Reibung gleich sein müsse. D. i., daß:

$$LN = LF + \frac{LS \times AB}{3AH} + \frac{LO \times BH}{3AH} \text{ seie.}$$

Setzt man nun anstatt den erstern zwei Größen ihren oben gefundenen Werth, so ist:

$$\frac{LO \times AB}{AH} = \frac{LS \times BH}{AH} + \frac{LS \times AB}{3AH} + \frac{LO \times BH}{3AH}$$

oder

$$\frac{LO \times AB}{AH} - \frac{LO \times BH}{3AH} = \frac{LS \times BH}{AH} + \frac{LS \times AB}{3AH}$$

und nach Hinweglassung der gleichen Divisoren

$$LO \times AB - \frac{LO \times BH}{3} = LS \times BH + \frac{LS \times AB}{3}$$

$$\text{folglich } 3LO \times AB - LO \times BH = 3LS \times BH + LS \times AB$$

$$\text{und endlich } LO = \frac{3LS \times BH + LS \times AB}{3AB - BH}$$

der Kraft, welche sowohl der Last, als der Reibung das Gleichgewicht halten kan.

Aufgabe.

§. 324. Wie die Kraft zu berechnen, welche erfordert wird, einer an einer Schraube hangenden Last sowohl als der in den Schraubengängen entstehenden Reibung das Gleichgewicht zu halten?

Auflösung: Wenn wir annehmen, daß die an die Schraubenmutter angebrachte Last L an der senkrecht stehenden Spindel DE durch Umdrehung der erstern in die Höhe bewegt werden sol, so betrachtet, daß es einerlei seie, ob die Last durch die Schraubenmutter ohne

Fig. 118.

Unmittelbar durch den Hebel und nur durch eine in N angebrachte Kraft, oder durch eine zum Horizont parallele AH , wovon AB dem AH mit einem Radius CN in der Mitte eines vorstehenden AH , und HB der Höhe NM eines Schraubenganges gleich ist, in die Höhe gebracht wird. §. 323. Aus dieser Ursache wird also die bei N angebrachte Kraft, welche sowohl der Last als der Reibung das Gleichgewicht halten kan

$$N = \frac{3L \times BH + L \times AB}{3AB - BH} \text{ sein.}$$

Weil aber gewöhnlicher weise zur Umbrähung der Schrauben, oder ihrer Mutter noch ein Hebel CF angewendet wird, um die am Ende F desselben angebrachte Kraft K noch mehr zu erleichtern, so ist vermög demselben $CF : CN = N : K$

$$\text{folglich } \frac{CN \times N}{CF} = K$$

setzt man nun anstatt N seinen gefundenen Werth,

$$\text{so ist } \frac{CN \times (3L \times BH + L \times AB)}{CF \times (3AB - BH)} = K$$

der Kraft, welche sowohl der Last L als der an den Schraubengängen vorkommenden Reibung das Gleichgewicht zu halten vermag.

Die engen Gränzen, welche diesen Anfangsgründen gesetzt sind, erlauben nicht, uns über diese Materie weiter auszudehnen. Es wird aber nicht schwer sein die gegebenen Regeln auf mehrere andere Fälle anzuwenden. Wer hierinnen weitem Unterricht verlangt, kan die Schriften von Belidor, Camus, Amduron, Bosc u. a. m. nachsehen.

Mittel die Reibung an den Maschinen
zu vermindern.

§. 325. Obwohl sich die Reibung an den Maschinen niemals gänzlich aufheben läßt, so kan sie doch durch nachstehende Mittel um vieles vermindert werden.

1. Hat man soviel möglich Sorge zu tragen, daß sich nicht Materien von gleicher Beschaffenheit z. B. Eisen auf Eisen, Messing auf Messing, eine gewisse Art Holz auf einem andern von eben derselben reibe. Die Erfahrung lehret, daß sich Eisen auf Messing oder Metal, Stahl auf Zinn; hartes Holz auf Messing oder auch auf Holz von einer andern Art weniger reibe.

2. Soll man die sich reibenden Teile einer Maschine so glat als möglich machen, und zu verhindern trachten, daß sich nicht fremde harte Körperchen als Sand oder Staub dazwischen setzen.

3. Läßt sich die Reibung an allen Achsen oder Lagerzapfen leichter überwinden, wenn man sie von so kleinen Durchmesser anordnet, als die Schwere der Last, die sie zu tragen haben, und die Dauerhaftigkeit erlauben; und auch wenn man sie anstatt in Pfannen auf zwei neben einander liegende Rollen aufliegen läßt.

4. Wird die Reibung an den Zähnen der Räder und an den Spindeln der Getrieben leichter überwältiget, erstlich ie mehrere Zähne und Spindeln sich an denselben befinden, und denn auch, wenn die äußersten Ende der Zähne in der Gestalt einer Cycloide abgerundet sind.

5. Wird die Reibung vermindert, wenn man die sich reibenden Teile mit schicklichen Materien schmieret. Die Erfahrung lehret, daß, wenn sich Holz auf Holz

reibt, man solches mit Wasserblei oder Reibblei oder auch mit Seifen bestreichen müsse. Eisen wird gewöhnlich mit Baumöhl oder Ochsenklaufet, Messing mit sehr weichen Wachs bestrichen. Zu grossen Maschinen bedient man sich auch der gemeinen Wagenschmiere, oder Schmere.

6. Wird die Reibung vermindert, wenn die gerade oder schleifende Bewegung einer Last in eine fortwährende verwandelt wird, oder wenn Rollen oder Walzen unterlegt werden.

7. Wenn an einer Maschine Stricke nöthig sind, sol man lieber schon etwas gebrauchte als ganz neue nehmen, weil die erstern mehr Biegsamkeit haben.

8. Um endlich überhaupt die Reibung so gering zu machen, als möglich ist, hat man nebst obigen Mitteln zu trachten, die Maschinen so einfach als nur immer die Umstände erlauben, zu machen.

Ubrigens, so wie die Reibung an den Maschinen oftmals sehr hinderlich und schädlich ist, so wird sie auch öfters nützlich und nothwendig; denn sie hemmet die alzugrosse Geschwindigkeit z. B. an einem gesperrten Wagenrade, oder in dem sogenannten Bremsrade. Sie ist die Ursache, daß die Drähespindeln, Spulen, Schmier oder Riemenräder sich umdrähen können. Das Feilen, Schleifen, Poliren u. d. g. geschieht einzig durch die Reibung.

Dritter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und Druck der flüssigen Körper.

Erstes Hauptstück.

Von dem Gleichgewichte der flüssigen Körper, und ihrem Drucke gegen die Grund- und Seiten- flächen der Gefäße, in welchen sie enthalten sind.

Erfahrung.

§. 326.

Wenn eine flüssige Materie in ein Gefäß gegossen wird, so setzt sich die Oberfläche derselben allezeit mit dem Horizont parallel, so bald sie still zu stehen anfängt.

Z u s a z.

§. 327. Da alle Punkten einer wahren Horizontalfläche gleichweit von dem Mittelpunkt der Erde abstehen, und folglich einen Teil der Oberfläche einer Kugel ausmachen, die mit der Erde einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt hat, so sind auch alle Punkten der Oberfläche einer flüssigen und stillstehenden Materie gleichweit von dem Mittelpunkt der Erde entfernt, und

ein Teil der Oberfläche einer Kugel, die mit der Erde einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt hat.

Obschon dieses in kleinern Gefäßen unmerklich ist, und die Oberfläche der flüssigen Materien in denselben ganz gerade zu sein scheint, weil sie nur einen sehr kleinen Teil der Kugelfläche ausmacht; so ist doch die Krümmung der Oberfläche bei grossen Seen, oder an dem Weltmeere sehr merklich.

Obwohl die Oberfläche des Quecksilbers, und die des Wassers, wenn solches nehmlich in ein sehr trocknes oder staubiges Gefäß gegossen wird, sich gegen die Mitte etwas mehr aufthürmet, an den Wänden des Gefäßes aber etwas niedriger wird, so hindert doch dieses die Richtigkeit der angeführten Erfahrung nicht; weil dieses von einer andern Ursach; nehmlich von den stärkern Zusammenhang der flüssigen Materie mit den Wänden des Gefäßes als mit seinen eigenen Teilchen herkommt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 328. Wenn also ein Teil der Oberfläche einer flüssigen Materie durch was immer für einen Zufal oder Ursache höher, oder weiter von dem Mittelpunkt der Erde als ein anderer entfernt ist, und von nichts gehindert wird, so wird er gegen den niedern so lange abfließen, bis alle Teile in gleiche Höhe gekommen sind, oder bis die Oberfläche gänzlich horizontal wird.

E r f a h r u n g.

Fig. 119.

§. 329. Wenn ein Gefäß XY durch Wände AB, CD, EF auf was immer für Art abgeteilet ist, doch daß die Abteilungen durch die gelassenen Oefnungen ILS noch eine Gemeinschaft haben, und es wird eine flüssige.

flüssige Materie in eine dieser Abtheilungen gegossen, so steigt sie in allen auf gleiche Höhe.

Eben dieses ereignet sich, wenn verschiedene und an **Fig. 120.** beiden Enden offene Röhren AB, CD, EF, GH u. s. w. in ein mit einer flüssigen Materie angefülltes Gefäß getaucht werden, die Röhren mögen was immer für eine Gestalt haben.

Nur müssen diese Röhren nicht gar zu eng sein, und nicht den sogenannten Haarröhrchen gleichen; denn in diesen würde die flüssige Materie aus einer andern Ursache um ein merkliches höher als in dem Gefäße steigen.

Z u s a z.

§. 330. Da also die flüssige Materie bei dem Eintauchen der Röhren sowohl durch die abwärts und aufwärts stehende Oefnungen B und F, als durch die ander Seite befindliche D und H eindringet, und in allen Röhren auf gleiche Höhe steigt, so ist zu schliessen, 1. daß dieselbe ihren Druck nicht allein abwärts, sondern auch aufwärts und nach allen Seiten gleich ausübe: 2. daß der Druck gegen diese Oefnungen um so grösser seie, als die Röhren tiefer eingetaucht werden; weil alsdenn die flüssige Materie in dem Gefäße eine grössere Saule derselben in der Röhre erhalten mus.

Lehrsatz.

§. 331. Wenn eine flüssige Materie von einerlei Schwere in untereinander in Gemeinschaft habende Röhren gegossen wird, so steigt dieselbe in allen auf gleiche Höhe; die Röhren mögen eine gleiche oder ungleiche Weite haben, senkrecht oder schief, gerade oder gebogen sein.

Fig. 121. Beweis: Aus der §. 329. angeführten Erfahrung ist bekannt, daß, wenn eine flüssige Materie in ein mit verschiedenen Wänden abgetheiltes Gefäß gegossen wird, dieselbe in allen Abtheilungen, welche mit einander Gemeinschaft haben, auf gleiche Höhe steige; nun aber kan man die mit einander Gemeinschaft habende verschiedene Röhren Nr. 1. 2. 3. 4 als Gefäße ansehen, die durch Wände auf verschiedene Weise abgetheilet sind, also wird auch die flüssige Materie in denselben gleiche Höhen einnehmen; und da dieses in einem abgetheilten Gefäße geschieht, die Wände mögen was immer für eine Stellung haben, so mus es auch in den Röhren geschehen, sie mögen gleiche oder ungleiche Weite haben wie Nr. 1. 2. und 4; senkrecht wie Nr. 1 u. 2, oder schief wie Nr. 3 und 4, oder gerade wie Nr. 1 und 2, oder gebogen wie Nr. 4. sein.

Z u s a z.

§. 332. Da also die flüssige Materie in Gemeinschaft habenden Röhren oder Gefäßen auf gleiche Höhe steigt, so mus auch der in der einen Röhre oder Teile des Gefäßes befindliche Teil derselben dem in der andern das Gleichgewicht halten können, widrigenfalls würde ein Teil den andern mehr drücken, folglich auf eine grössere Höhe treiben müssen, als er selbst hat. Daraus ist also zu schliessen, daß in solchen Röhren sowohl eine gleiche Saule EF der flüssigen Materie einer andern gleichen Saule GH, als eine kleinere IL einer grössern MN; eine gerade OP einer schiefen QR; und ein ungleichweite ST einer andern verschieden gebogenen VX das Gleichgewicht zu halten vermag, und dazu nur erforderlich sei, daß sie eine gleiche senkrechte Höhe haben.

Zus

Z u s a z.

§. 333. Wird die flüssige Materie in der gleichweiten Röhre Nr. 1. von E bis A von einer Kraft niedergedrückt, so ist klar, daß sie in der andern Röhre, die mit ihr in gleicher Weite ist, um eben soviel daß, ist um GB steigen, und in beiden gleiche Geschwindigkeit in ihrer Bewegung erhalten müsse, wird aber die flüssige Materie in der ungleichweiten Röhre Nr. 2. von M bis C niedergedrückt, so mus sie in der engern Röhre von I nach D und zwar um soviel höher als CM steigen, als die Grundfläche der größern Röhre größer als die der kleinern ist; weil der Teil der flüssigen Materie, welcher aus dem Raume der grossen Röhre dessen Höhe MQ ist, hinaus gedrückt wird, alsbenn nothwendig in der kleinern einen gleichen Raum einnimmt. Da aber der Durchmesser in derselben kleiner ist, so mus dieser Abgang in der Höhe ersetzt werden. D. i. wenn n die kleinere und m die größere Grundfläche ist, so ist $n : m = CM : DI$, und folglich

$$\frac{CM \times m}{n} = DI.$$

Derowegen werden sich auch die Geschwindigkeiten, die die flüssige Materie bei ihrer Bewegung in beiden Röhren erhält, wie die Höhen CM und DI, oder wie umgekehrt die Grundflächen verhalten.

Ubrigens kan man hier noch merken, daß iene Art von Nivellir oder Wassermagen, so aus zween aufrecht stehenden, und durch ein blechernes Rohr Gemeinschaft habenden gläsernen Cylindern bestehet, sich auf den Lehrsaß §. 331. gründen, weil sich das in dieselben gegossenen Wasser in beiden auf gleiche Höhe setzet, folglich der nach beiden Wasseroberflächen genommene Wasserstrahl eine Horizontalinie vorstellet.

Lehr.

Lehrsatz.

§. 334. Wenn zwei flüssige Materien in gleicher Menge, aber von verschiedener eigenthümlicher Schwere in gemeinschaftliche Röhren gegossen werden, so sind ihre Oberflächen ungleich hoch, und zwar wird die der leichtern Materie um so höher sein, als die der schwerern, als die eine leichter ist als die andere; die Röhren mögen eine gleiche oder ungleiche Weite haben, senkrecht oder schief, gerade oder gebogen sein.

Beweis: Sind die Röhren von gleicher Weite und senkrecht, so ist klar, daß zwei flüssige Materie von ungleicher Schwere nicht mit gleichen Vermögen gegen einander wirken, oder sich das Gleichgewicht halten können; es wäre denn, daß man der ringern soviel an der Menge zusetzte, als ihr an der Schwere in Ansehung der schwerern Materie abgehet. Derowegen muß, wenn von beiden Materien eine gleiche Menge in die Röhren gegossen wird, die leichtere um so höher steigen als die schwerere, um wie viel sie von derselben an der eigenthümlichen Schwere übertroffen wird. Da aber die Größe oder Gestalt der Röhren oder ihre verschiedene Stellung das Gleichgewicht nicht verhindern kan, §. 332. so hat dieser Lehrsatz auch bei allen Gestalten und Stellungen der Röhren seine Richtigkeit.

Z u s a z.

§. 335. Zwei flüssige Materien von ungleicher Schwere halten sich also in gemeinschaftlichen Röhren das Gleichgewicht, wenn ihre Höhen in denselben mit ihren Schweren in umgekehrter Verhältniß stehen.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 336. Die horizontale Grundfläche eines gleichweiten Gefäßes wird von der ganzen Schwere der darin enthaltenen flüssigen Materie gedrückt.

Beweis: Bildet euch ein, als ob die in dem Ge. Fig. 122. fäße AE enthaltene flüssige Materie aus lauter unendlich dünnen und mit der Grundfläche CE parallel liegenden Elementen bestünde. Da ist nun gewis, daß das oberste Element mit seiner Schwere auf das zweite; dieses wieder mit seiner Schwere und zugleich mit der Schwere des ersten auf das Dritte drücke, folglich daß das unterste Element mit ihrer eigenen Schwere und mit der Schwere aller vorhergehenden Elementen die Grundfläche CE drücke. Die Schweren dieser Elementen aber machen zusammen die ganze Schwere der flüssigen Materie aus, also drückt die ganze Schwere der flüssigen Materie auf die Grundfläche eines gleichweiten Gefäßes.

Z u s a z.

§. 337. Da gleiche Volumens von einer flüssigen Materie einerlei Art auch gleiche Schwere haben, oder die Schweren derselben sich wie ihre Volumens verhalten, die Volumens zweener Cylinder von gleicher Höhe AC und BD, und von ungleichen Durchmessern CE und FD, sich aber wie ihre Grundflächen verhalten, §. 284. Geomet. so stehen auch die Drucke, welche die Grundflächen dieser Cylinder von der in ihnen gleichhoch stehenden flüssigen Materie zu leiden haben, in gerader Verhältniß ihrer Grundflächen. Sind aber die Durchmesser FD gleich, oder die nehmliche, und die Höhen DG und DB verschieden, so sind ihre Volumens wie ihre Höhen §. 284. Geomet. folglich auch
der

der Druck der darin enthaltenen flüssigen Materie gegen die Grundfläche wie diese Höhen.

Sind aber sowohl die Durchmesser CE und FD als die Höhen AC und DG ungleich, so steht der Druck der flüssigen Materie gegen die Grundflächen in einem zusammengesetzten geraden Verhältnis ihrer Höhen und Grundflächen.

Lehrsatz.

§. 338. Die horizontale Grundfläche eines ungleichweiten Gefäßes von was immer für einer Gestalt, wird nicht von der ganzen Schwere des Volumens der enthaltenen flüssigen Materie gedrückt, sondern der Druck ist gleich der Schwere eines Volumens eben dieser Materie, welches mit dem Gefäße gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Fig. 123.

Beweis: Wenn das Gefäß $AIBF$ unten weiter als oben ist, so bildet auch ein, als ob anstatt der Grundfläche AF eine gemeinschaftliche Röhre AMH von gleichem Durchmesser AF angefügt, und mit einer flüssigen Materie angefüllt wäre, so ist gewis, daß dieselbe in beiden Armen gleichhoch steigen, und die Schwere des Volumens in $AIBF$ der Schwere des Volumens in $ECHL$ das Gleichgewicht halten würde §. 331 und 332. indem der untere Teil AML der flüssigen Materie zu Erhaltung des Gleichgewichts nichts beiträgt. Wenn nun diese Röhre bei AF mit einer mathematischen Fläche horizontal durchschnitten wäre, so ist klar, daß dieselbe von der Schwere des Volumens $ECHL$ mittelbar durch die in LMA befindliche, und zum Druck nichts als die Fortsetzung beitragende flüssige Materie eben soviel aufwärts, als von der Schwere des Volumens $AIBF$ abwärts gedrückt würde.

Wenn

Wenn das Gefäß AIBF im andern Falle unten en- Fig. 124.
ger als oben wäre, so bildet auch abermal ein, daß
anstatt der Grundfläche AF desselben eine gemeinschaft-
liche Röhre AMH von gleichen Durchmesser AF an-
gefüget, und mit flüssiger Materie erfüllet wäre; so
wird dieselbe in beiden Armen ebenfalls gleichhoch stei-
gen, und die Schwere des Volumens in ECHL der
Schwere des Volumens in AIBF das Gleichgewicht
zu halten vermögen §. 331 und 332.; nicht minder
wird die bei AF angebrachte mathematische Fläche von
beiden Volumens von einem soviel aufwärts als von
dem andern abwärts gedrückt werden.

Da nun aber der Druck gegen die Grundfläche AF
in beiden Fällen der Schwere des Volumens ECHL
gleich ist, und dieses Volumen im ersten Falle grösser
als das Volumen AIBF des Gefäßes, in andern aber
kleiner ist, so ist auch der Druck gegen die Grundflä-
chen ungleichweiter Gefäßen nicht der Schwere des
Volumens der in denselben enthaltenen flüssigen Mate-
rie gleich, da ferner in beiden Fällen der Druck gegen
die Grundflächen AF der Schwere des Volumens
ECHL gleich ist, und die Schweren gleichartiger Ma- Fig. 123.
terien sich wie ihre Volumens verhalten, so kan man die u. 124.
Schwere oder den Druck durch das Volumen ECHL
selbst ausdrücken. Nun aber hat dieses Volumen in
beiden Fällen mit dem Gefäße gleiche Grundfläche und
Höhe, also ist der Druck der flüssigen Materie gegen
die Grundfläche eines ungleichweiten Gefäßes gleich der
Schwere eines Volumens eben dieser Materie, welches
mit dem Gefäße gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Und wie dieses von diesen zweien Gefäßen erwiesen
wird, kan es mit allen geschehen, sie mögen was im-
mer für eine Gestalt haben.

Z u s a z.

Fig. 122 §. 339. Wenn demnach z. B. der Boden eines Gefäßes durch eine Wassersäule, welche den Durchmesser des Bodens CD zum Durchmesser, und CF zur Höhe hat, eingedrückt werden kan, so mus derselbe auch durch eine Wassersäule AB, so dünne sie auch sein mag, wenn sie nur mit der andern gleiche Höhe hat, eingedrückt werden.

Wenn demnach in was immer für einem Wasser-gebäude z. B. unter der Bettung einer Schleusse schon einmal Wasser steht, es seie dessen Volumen auch so dünne als es wolle, wenn es nur einen beträchtlichen Teil der Fläche einnimmt, und es dringet von einer Höhe ein noch so feiner Wasserfaden dazu, so drückt er so stark gegen die Bettung aufwärts als eine Wassersäule, welche die Fläche des unter der Bettung stehenden Wassers zur Grundfläche, und die Höhe des Wasserfadens zur Höhe hat, daher es kein Wunder ist, wenn manchesmal von einem so kleinen und sehr leicht sich ereignen könnenden Zufal die Bettungen der Schleußen in die Höhe gehoben, oder Wasser-gebäude zerstöret werden.

L e h r s a z.

§. 340. Wenn ein geradstehendes prismatisches Gefäß mit einer flüssigen Materie angefüllet ist, so ist der Druck den eine von dessen Seitenflächen von der flüssigen Materie auszustehen hat, gleich dem Gewichte dieser Materie, welche in einem Parallelopipedum enthalten ist, welches diese Seitenfläche zur Grundfläche die halbe Höhe der in dem Gefäß stehenden flüssigen Materie aber zur Höhe hat.

Bes.

Beweis: Wenn ihr euch einbildet, daß die Höhe **Fig. 126.**
AB der Seitenfläche **ABCD** des prismatischen Gefäßes
DE in unendlich kleine Teile **AI, IL, LT** u. s. w.
 und **AF = AB** in eben so viele Teile **AG, GQ, QS**
 geteilet, und die Linien **IH, LZ** u. s. w. parallel zu
AD; **KI, ML** u. s. w. parallel zu **AF**; und **OG,**
PQ u. s. w. parallel zu **AB** gezogen wären, so ist ge-
 wis, daß die Schwere des Inhalts **AG × AD × AB**
 der flüssigen Materie soviel auf die Grundfläche **AG**
× AD als die Schwere des Inhalts **AI × AD × AF**,
 gegen den Teil **AI × AD** der Seitenfläche; die Schwere
 des Inhalts **QG × AD × QP** soviel auf die Grund-
 fläche **QG × AD** als die Schwere des Inhalts **IL**
× IH × LM auf den Teil der Seitenfläche **IL × HI**,
 u. s. w. und das endlich die Schwere des Inhalts **FR**
× AD × FK soviel auf die Grundfläche **FR × AD**
 als die Schwere des Inhalts **VB × VX × VO** gegen
 den Teil der Seitenfläche **VB × VX** drucke. Alle
 diese gegen die Seitenfläche **ABCD** druckende Paralle-
 lopipedums aber machen zusammen den ganzen Druck
 gegen dieselbe aus, und stellen einen Körper oder ein
 dreieckiges Prisma **FABCD** vor, davon **AF = AB**
 die Länge und Breite der Grundfläche, **AD** die Höhe

ist, und folglich $\frac{AB}{2} \times AB \times AD$ der körperliche In-
 halt ist. Eben diese Faktoren stellen aber auch den kör-
 perlichen Inhalt eines Parallelopipedums **YSABCD**
 vor, welches die Seitenfläche **ABCD** zur Grundfläche,
 und die halbe Höhe **AB** zu seiner Höhe hat, also ist
 der Druck der flüssigen Materie gegen eine Seitenfläche
 eines prismatischen Gefäßes dem Gewicht eben dieser
 Materie gleich, welche in einen Parallelopipedum ent-
 halten ist, welches die Seitenfläche zur Grundfläche;

und die halbe Höhe der flüssigen Materie in dem Gefäße zur Höhe hat.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 341. Um also die Last zu berechnen, mit welcher ein Schußbret einer Schleuse von den dahinten stehenden Wasser gedrückt wird, so hat man nach §. 340. nur den Flächeninhalt des Schußbretes mit der halben Höhe des dahinter stehenden Wassers, und das dadurch erhaltene Produkt wiederum durch die eigenthümliche Schwere des Wassers zu multipliciren z. B. die Breite 6 Sch., die Höhe des dahinten stehenden Wassers 8 Schuh und der Kubitschuhwasser 57 lb schwer, so ist $6 \times 8 \times \frac{1}{2} \times 57 = 10944$ lb die gesuchte Last, und folglich wird man mit einer etwas größern Kraft im Stande sein, das Schußbret aufzuziehen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Fig. 126.

§. 342. Ferner folget, daß, wenn auch das Gefäß viel länger als hoch wäre, wie z. B. ED, und folglich viel mehrer flüssige Materie als das druckende Prisma FBACD oder Parallelopipedum YSABCD enthielte, so trüge doch das übrige nichts zu einem größern Drucke gegen die Seitenfläche ABCD bei. Dagegen aber, wenn das Gefäß viel kürzer als hoch, und z. B. nur von der Länge EU wäre, folglich viel weniger als das druckende Prisma oder Parallelopipedum von der flüssigen Materie enthielte, so würde doch der Druck gegen die Seitenfläche so groß sein, als wenn das Gefäß so lang als hoch wäre. Daraus ist also überhaupt zu schliessen, daß der Druck gegen die perpendicular stehenden Seitenflächen eines Gefäßes voll mit flüssiger Materie bloß von ihrem Flächeninhalt,

halt, und der Höhe der dahinter stehenden flüssigen Materie abhänge. Man wird also in dem Gefäße ED die Seitenfläche ABCD nicht dicker als in den Gefäße, welches nur die Länge EU hat, machen dürfen, damit sie dem Druck widerstehe.

Lehrsatz.

§. 343. Der Druck einer flüssigen Materie gegen eine Rechtwinkelige aber schiefstehende Seitenfläche eines Gefäßes ist gleich dem Gewicht dieser Materie, welche in einem Parallelopipedum enthalten ist, so die Seitenfläche zur Grundfläche, und die halbe Höhe der im Gefäß stehenden flüssigen Materie zur Höhe hat.

Beweis: Bildet euch ein, daß die schiefstehende Seitenfläche ACFE ebenfalls wie §. 340. in lauter unendlich schmale horizontale Parallelogrammen eingetheilt sei, und daß jedes derselben so wie es tiefer unter der Oberfläche der flüssigen Materie liegt, auch mehrer von derselben gedrückt werde; folglich daß das unterste AE den größten Druck von dem Parallelopipedum ABNE der flüssigen Materie, welches die ganze Höhe AB derselben zur Höhe hat, bekomme, und daß der Druck des obersten CF = 0, oder unendlich klein sei. Setzt man nun AD = AB perpendicular auf AC, ziehet C und D zusammen, machet das dreieckigte Prisma ACDGFE vollends aus, und bildet sich ein, daß dieses aus so vielen Parallelopipedum oder Elementen, davon ADGE = ABNE das größte, und CF = 0 das kleinste ist, zusammengesetzt sei, als die Seitenfläche ACFE selbst parallelogrammen enthält, so stellet jedes dieser Parallelopipedum den Druck vor, welchen ein jedes Parallelogramm der Seitenfläche insbesondere auszustehen hat; daß ganze Prisma ACDGFE aber oder das Gewicht der dar-

276 III. Abschn. I. Hauptst. von d. Gleichg. 1c.

innen enthaltenen flüssigen Materie stellet den Druck vor, welcher gegen die ganze Seitenfläche ausgeübet wird. Da nun aber dieses Prisma einem Parallelopipedum **ACMHILFE**, welches die Seitenfläche **ACFE** zur Grundfläche, und die halbe Höhe $AH = \frac{AB}{2}$ zur Höhe hat, gleich ist, so ist auch erwiesen, daß der Druck einer flüssigen Materie gegen eine rechtwinkelichte schiefstehende Seitenfläche eines Gefäßes dem Gewicht der flüssigen Materie gleich sei, welche in einem Parallelopipedum enthalten ist, das die Seitenfläche zur Grundfläche, und die halbe Höhe der flüssigen Materie zur Höhe hat.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 344. Wäre die Seitenfläche **SOPQ** auf eine gegen der vorigen verkehrte Art schief gestellt, so läßt sich der besondere Druck, welchen die Parallelogrammen dieser Seitenfläche von der in dem Gefäße enthaltenen flüssigen Materie auszustehen haben, ebenfalls wieder durch die Parallelopipeden, welche das Prisma **SOTVPQ** zusammen ausmachen, vorstellen, wenn nemlich $ST = OR$ perpendicular auf **SO** gemacht wird; und eben daher läßt sich auch auf die vorige Art erweisen, daß auch in gegenwärtigen Falle der Druck der flüssigen Materie gegen eine so gestellte Seitenfläche eines Gefäßes dem obgesagten Prisma, oder einem Parallelopipedum **OSUYXPQ** gleich sei, welches die Seitenfläche des Gefäßes zur Grundfläche, und die halbe Höhe der flüssigen Materie zur Höhe hat.

Zweites Hauptstück.

Von eingetauchten festen Körpern in flüssige Materien.

Erfahrung.

§. 345. Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie gelegt wird, so drückt er soviel von derselben aus ihrem Plaz, als das unter die Oberfläche der flüssigen Materie eingetauchte Volumen beträgt.

Erklärung.

§. 346. Wenn zween Körper von verschiedener Art oder Materie unter gleichen Volumen verschiedenes Gewicht haben, so pflegt man zu sagen, daß der eine ein grössere eigenthümliche Schwere (*Gravitas specifica*) als der andere habe. D. i. da ein Kubitzoll Gold ein grösseres Gewicht als ein Kubitzoll Eisen, und dieser ein grösseres als ein Kubitzoll Holz oder Wasser hat, so hat auch das erstere eine grössere eigenthümliche Schwere als das andere, und dieses wieder eine grössere als das dritte und vierte.

Lehrsatz.

§. 347. Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie gelegt wird, so mus derselbe 1. wenn er mit der flüssigen Materie gleiche eigenthümliche Schwere hat, unter ihrer Oberfläche in allen Stellen in Ruhe bleiben: 2. wenn er schwerer als die flüssige Materie ist, bis auf dem Boden des Gefäßes untersinken; 3. wenn er leichter als die flüssige Materie ist, oben dar-

auf schwimmen, und nur ein Teil davon sich einsenken.

Beweis des ersten Theils: Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie von gleicher eigenthümlicher Schwere gelegt wird, so hat er soviel Vermögen sich nach dem Mittelpunkt der Erde zu bewegen, als ein ihm gleiches Volumen der flüssigen Materie selbst; da aber die Teile der flüssigen Materie sich untereinander das Gleichgewicht halten, und in Ruhe bleiben, so wird es auch dieser Körper thun, und so wie die flüssige Materie selbst in allen Stellen in Ruhe bleiben.

Beweis des zweiten Theils: Wenn ein fester Körper eine grössere eigenthümliche Schwere als eine flüssige Materie von gleichen Volumen hat, so trachtet er auch mit einer grössern Kraft nach dem Mittelpunkt der Erde als ein ihm gleiches Volumen der flüssigen Materie, derowegen überwindet er das Gleichgewicht der flüssigen Materie die ihn umgiebt, und sinket unter so weit er kan, nemlich bis auf dem Boden des Gefässes.

Beweis des dritten Theils: Ist aber der Körper von geringerer eigenthümlicher Schwere als die flüssige Materie, so ist ein kleineres Volumen von derselben schon im Stande der Schwere des ganzen Körpers das Gleichgewicht zu halten, daher wird er auch nicht ganz, sondern nur zum Teil einsinken.

Lehrsatz.

§. 348. Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie gelegt wird, so mus er 1. wenn er mit derselben gleiche eigenthümliche Schwere hat, seine ganze Schwere in derselben verlieren; 2. wenn er schwerer als dieselbe, soviel von seiner Schwere verlieren, als
ein

B. eingetaucht: fest. Körper. in flüssige Mater. 279

ein Volumen, das dem des Körpers gleich ist, von der flüssigen Materie an Gewicht beträgt; 3. wenn der Körper leichter als ein gleiches Volumen der flüssigen Materie ist, soviel von seiner Schwere verlieren, als das Volumen der flüssigen Materie an Gewicht beträgt, welches er durch sein Einsinken hinweg drückt.

Beweis des ersten Theils: Da die flüssige Materie einem Körper von gleicher eigenthümlicher Schwere gänzlich das Gleichgewicht hält, §. 347., so wird er von derselben gleichsam getragen, und verlieret also seine ganze Schwere in ihr.

Beweis des zweiten Theils: Ist aber der Körper schwerer als die flüssige Materie, so betrachtet, daß das Volumen der flüssigen Materie, welches von ihm hinweg gedrückt wird, und dem ganzen Volumen desselben gleich ist, zuvor mit den übrigen Theilen der flüssigen Materie im Gleichgewicht standte; da aber nun der Körper in seine Stelle kommt, so mus die flüssige Materie eben wieder soviel gegen denselben wirken, als die Schwere des hinweg gedrückten Volumens beträgt, folglich mus der Körper soviel von seiner Schwere verlieren, als die Schwere des Volumens der flüssigen Materie beträgt, welches dem Volumen des Körpers gleich ist.

Beweis des dritten Theils: Wenn endlich der Körper leichter als die flüssige Materie ist, so betrachtet, daß, wenn er mit derselben von gleicher Schwere wäre, auch ein gleiches Volumen derselben mit ihrer Schwere in ihn wirken, und er seine ganze Schwere verlieren würde; da er aber leichter als die flüssige Materie ist, so kan ihm auch ein kleineres Volumen derselben schon das Gleichgewicht halten, und er wird

daher nur soviel von seiner Schwere verlieren, als das Volumen der flüssigen Materie an Gewicht beträgt, welches er durch sein Hineinsinken hinweg drückt.

Z u s a z.

§. 349. Wenn demnach eine Kraft einem in eine flüssige Materie getauchten Körper das Gleichgewicht halten sol, so mus dieselbe, 1. wenn der Körper mit der flüssigen Materie gleiche Schwere hat, unendlich klein oder $= 0$ sein; 2. wenn der Körper schwerer als die flüssige Materie, nur demjenigen Teil seines Gewichts gleich sein, um welchen er schwerer als ein ihm gleiches Volumen der flüssigen Materie ist, 3. wenn endlich der eingetauchte Körper leichter als die flüssige Materie ist, die Kraft nur dem Teile des Gewichts gleich sein, um dem er leichter als die flüssige Materie ist.

In allen drei Fällen aber verbleibt die Kraft nur so lang erleichtert, als der Körper noch so tief in der flüssigen Materie ist, als er selbst einsinkt, so bald man denselben über die Oberfläche der flüssigen Materie herausziehen anfangt, so nimt auch seine Schwere wieder zu, und erhält solche wieder ganz, wenn er die flüssige Materie nicht mehr berührt. Daher kommt es, daß man die Schwere eines Brunnen Eimers so lang er noch untern Wasser fast gar nicht verspüret, hingegen da er aus demselben gezogen wird, sein ganzes Gewicht fühlet.

Z u s a z.

§. 350. Da überhaupt ein fester Körper von größerer eigenthümlicher Schwere in einer flüssigen Materie soviel von seinem Gewicht verlieret, als das Volumen
der

der flüssigen Materie wieget, so er hinweg drückt, §. 348., und zween Körper von gleichen Volumen, aber von verschiedener eigenthümlicher Schwere, z. B. ein Kubitschuh Blei und ein Kubitschuh Eisen gleiche Volumens der flüssigen Materie nehmlich einen Kubitschuh hinweg drücken, so müssen auch beide in einerlei flüssiger Materie gleich viel von ihrer Schwere verlieren; da aber ein Kubitschuh Blei schwerer als ein Kubitschuh Eisen ist, so ist klar, daß das Blei oder überhaupt ein ieder Körper von grösserer eigenthümlicher Schwere in einer flüssigen Materie in Ansehung seines ganzen Gewichts weniger als der Kubitschuh Eisen, oder überhaupt als ein ieder Körper von geringerer eigenthümlicher Schwere verliere. Z. B. wenn der Kubitschuh Blei = 644 Lb , der Kubitschuh Eisen = 435 Lb , und der Kubitschuh Wasser = 57 Lb ist, so verlieret sowohl der erste als andere 57 Lb im Wasser, dieser Verlust aber machet bei dem ersten etwas mehr als den 11ten, und bei dem andern etwas mehr als den 7ten Teil ihres ganzen Gewichts aus.

Z u s a z.

§. 351. Da ein fester Körper von grösserer eigenthümlicher Schwere als eine flüssige Materie in derselben soviel von seinem Gewicht verlieret, als die flüssige Materie in einen gleichen Volumen selbst wieget, §. 348., so läßt sich die Schwere derselben finden, wenn das Volumen des festen Körpers bekant ist, und man weis, wie viel er in freier Luft wieget, und wie viel er in der flüssigen Materie an seinem Gewicht verlieret; indeme man setzet: wie das Gewicht des festen Körpers in der Luft zu dem Verlust desselben in der flüssigen Materie, eben so verhält sich die eigenthümliche Schwere, oder z. B. das Gewicht eines Kubitschuhes

des Körpers zur eigenthümlichen Schwere z. B. eines Kubitschubes der flüssigen Materie.

Wäre aber die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie bekannt, und die des festen Körpers zu suchen, so hätte man zu sehen: wie der Verlust der Schwere des festen Körpers in der flüssigen Materie zu seinem ganzen Gewicht, so verhält sich die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie zu der eigenthümlichen Schwere des festen Körpers. Z. B. man wüßte, daß die eigenthümliche Schwere oder ein Kubitschub Wasser = 57 lb , und man fände daß die Schwere eines festen Körpers von was immer für einem Volumen in der Luft 360 lb , im Wasser aber 313 lb wäge, und folglich 47 lb verliere, so ist: $47 : 360 = 57 : x = 436 \text{ lb}$ der eigenthümlichen Schwere, oder der Schwere eines Kubitschubes des festen Körpers.

Z u s a m m e n f a s s u n g

§. 352. Da erforderlich ist, daß zween Körper von verschiedener eigenthümlicher Schwere gleiche Volumens haben müssen, wenn sie in einer flüssigen Materie gleich viel am Gewicht verlieren sollen, §. 350; so werden zween Körper von verschiedener eigenthümlicher Schwere auch von verschiedenen Volumens sein müssen, wenn sie einander die Wage in freier Luft halten sollen; aber eben daher werden sie einander in einer flüssigen Materie nicht mehr die Wage halten können, sondern, weil der von der größern eigenthümlichen Schwere ein kleineres Volumen hat, so wird er auch weniger von seinem Gewichte verlieren §. 350., und also nothwendig einen Ausschlag an der Wage auf seiner Seite verursachen, und zwar werden ihre Volumens mit ihren eigenthümlichen Schweren, oder mit ihren

B. eingetaucht. fest. Körper. in flüssige Mater. 283

ihren Verlusten am Gewicht in der flüssigen Materie in verkehrter Verhältniß stehen.

Z u s a z.

§. 353. Weil ferner ein doppeltes, dreifaches u. s. w. Volumen eines festen und eigenthümlich schwereren Körpers als eine flüssige-Materie auch einen doppelten dreifachen u. s. w. Teil in Ansehung eines einfachen Volumens an seinem Gewichte verliert, so verhalten sich die Volumens zweener Körper von einerlei Art, wie die Teile der Schwere, so sie in der flüssigen Materie verlieren. Dieses giebt also Gelegenheit das Volumen, oder den kubischen Inhalt eines Körpers X, der etwaum so unregelmäßig ist, daß er durch die Regeln der Geometrie nicht genau ausgemessen werden kan, auf folgende Art zu finden: nemlich nehmet einen beliebigen Körper A von eben der Materie wie der unregelmäßige ist, dessen Inhalt euch aber schon bekannt ist, oder doch leicht gemessen werden kan; wäget sowohl A als X in freier Luft und im Wasser oder in einer andern flüssigen Materie von leichterer Art; sehet zu, was ieder in demselben am Gewichte verliert, und sehet: wie der Verlust des Körpers A zum Verlust des Körpers X, eben so verhält sich der Kubikinhalt des Körpers A zum gesuchten Kubikinhalt des Körpers X.

Z u s a z.

§. 354. Da ein Körper von schwererer Art in einer flüssigen Materie soviel von seinem Gewicht verliert, als das Gewicht eben dieser flüssigen Materie unter einem gleichen Volumen beträgt §. 348.; ein Volumen einer gewissen flüssigen Materie aber schwerer als ein nemliches Volumen einer andern flüssigen Materie,
von

von leichterem Art, ist, so mus ein Körper in zweierlei flüssigen Materien gewogen, in der von schwererer Art mehr von seinen Gewicht verlieren, als in der leichtern. Derowegen wird ein Kubitschuh Blei im Wasser einen größern Teil seines Gewichts als im Brandwein verlieren; und zwar werden die Verluste der Schwere mit den eigenthümlichen Schweren in gerader Verhältnis stehen. Wenn man demnach die eigenthümliche Schwere einer flüssigen Materie kennet, und sie von mehreren zu wissen verlangt, so hat man nur einen nehmlichen festen Körper von schwererer Art in denselben abzuwiegen, die verschiedenen Verluste, die er in denselben an seinen Gewichte leidet, aufzumerken, und alsdenn zusehen: wie der Verlust des Gewichts des Körpers in der bekanten flüssigen Materie zu dem Verlust in einer ieder andern unbekanten, eben so verhält sich die bekante oder gegebene eigenthümliche Schwere der ersten flüssigen Materie zu ieder zu suchenden.

Z u s a z.

§. 355. Aus eben der Ursach können zween gleich groffe und schwere Körper einander das Gleichgewicht nicht mehr halten, wenn sie auf eine Wage gelegt, und einer in eine flüssige Materie von schwererer Art, und der andere in eine von leichterem gesenkt werden, so wird ein Kubitschuh Eisen einem andern Kubitschuh Eisen, ieder von 435 lb das Gleichgewicht nicht mehr halten, wenn einer in Brandwein und der andere in Wasser gesenkt wird.

Aus eben diesem Grund kan man gros Münzen untersuchen, ob nicht eine verfälscht seie, wenn man sie nehmlich auf eine Wage leget, und sowohl in freier Luft, als in Wasser abwieget. Haben

B. eingetaucht. fest. Körper. in flüssige Mater. 285

ben sie beidemale gleiches Gewicht so sind sie auch von gleicher Güte; wird aber eine im Wasser leichter als die andere, so ist es ein Zeichen, daß die leichtere verfälscht ist.

Z u s a z.

§. 356. Wenn ein fester Körper eine mindere eigenthümliche Schwere als eine flüssige Materie hat; so muß er, wenn er in dieselbe gelegt wird, um so tiefer einsinken, als sich seine eigenthümliche Schwere mehr der eigenthümlichen Schwere der flüssigen Materie nähert §. 348., und weil er soviel von der flüssigen Materie hinweg drückt, als er selbst schwer ist, so muß sich die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie zur Schwere des festen Körpers wie das Volumen z. B. eines Kubitschubes der flüssigen Materie zu dem Volumen des Körpers, welches unterfinke, verhalten. Wenn demnach das ganze innere Volumen eines Schiffes als ein Körper von minderer eigenthümlicher Schwere als das Wasser angesehen wird, und sowohl die eigenthümliche Schwere des Wassers = 57 Th , und die Schwere 236550 Th , und das Volumen des beladenen Schiffes bekannt ist, so kan man den Teil des Volumens des Schiffes finden, welcher mit dieser Ladung unter Wasser dauchen wird, wenn man setzet: $57 \text{ Th} : 236550 = 1 : x = 4150 \text{ Th}$ Kubitschub dem unterdauchenden Volumen.

Verlangte man aber zu wissen, mit welcher Last man ein Schiff, dessen Volumen, so weit man es nehmlich unter Wasser gehen lassen will, durch geometrische Regeln ausgemessen und bekannt worden, beschweren darf, ohne das es Gefahr leidet unterzugehen, so kan man, wenn man die Schweren und Volumens z. B. wieder wie zuvor annimt, setzen:

i Sch.

286 : III. Abschnitt. II. Hauptstück.

I Sch. : 4150 Sch. = 57 lb : x = 236550 lb
 der Last, mit welcher das Schiff beschweret werden
 darf.

Obmohl die Metale von einer größern eigenthümlichen Schwere als das Wasser sind, so kan man sie doch darauf schwimmen machen, wenn man sie heimlich dünne und hohl ausschlägt, so daß das Volumenwasser, welches sie hinweg drücken müssen, bevor sie untersinken können, schwerer als ihr eigenes Volumen ist. Daher kommt es, daß man sich kupferner oder blecherner Pontonschiffen bedienen könne, und daß überhaupt Schiffe eine größere Last tragen, als sie vermög ihren wahren Volumen solten.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 357. Ferner folget noch, daß wenn man einen heimlichen Körper von geringerer eigenthümlicher Schwere in zwei flüssige Materien von verschiedenet eigenthümlicher Schwere z. B. einmal in Wasser, und einmal in Brandwein leyet, derselbe in Brandwein als in der leichtern Materie tiefer als in Wasser oder in der schwerern einsinken werde, weil das Volumen von Brandwein größer, als das Volumen von Wasser sein wird, welches dem Körper an Gewicht gleich ist, und von ihm ausgedrückt wird. Überhaupt aber werden die Einsenkungen eines festen aber von minderer eigenthümlicher Schwere in verschiedene flüssige Materien sich in umgekehrter Verhältniß der eigenthümlichen Schwere der flüssigen Materien befinden.

Eben daher ist die Ursach, warum ein beladenes Schiff im süßen Wasser tiefer als im Meer
 ge-

B. eingetaucht. fest. Körper. in flüssige Mater. 287

geht, und in dem erstern manchesmale gar unter-
sinket, ob es sich schon im andern ganz gut über
Wasser erhalten hat.

Aufgabe.

§. 358. Wie das Verhältniß der eigenthümlichen
Schwere von mehreren flüssigen Materien durch Ein-
tauchung eines festen Körpers in dieselben zu finden.

Auflösung: 1. Nehmet ein metalenes oder gläser-
nes hohles Prisma, oder einen Cylinder der unten zu-
geschlossen ist, und theilet seine Länge in eine beliebige
Anzahl gleiche Teile ein.

2. Stellet denselben in eine der vorhabenden flüssi-
gen Materie, mit welcher ihr die übrigen vergleichen
wollt, z. B. in Wasser; und werfet soviel bleierne
Schrotte in denselben, bis er von selbst im Wasser
aufrecht stehet, und sich bis auf einen gewissen Thei-
lungspunkt, welchen ihr anzunehmen gedenket, ein-
senket.

3. Stellet nun den Cylinder mit eben diesen bleier-
nen Schrotten beschwert auch in die übrigen noch vor-
habenden flüssigen Materien, und bemerket ebenfalls in
ieder den Theilungspunkt, auf welchen sich der Cylinder
einsenket.

4. Um also die Verhältnisse dieser flüssigen Mate-
rien zu finden setzet nach §. 357. wie die angemerkte
Tiefe der Einsenkung in der ersten flüssigen Materie zur
Tiefe in der andern, eben so verhält sich die eigen-
thümliche Schwere der andern flüssigen Materie zur
eigenthümlichen Schwere der erstern. Wenn ihr nun
mit allen übrigen eben so verfähret, und euch die ei-
genthümliche Schwere von einer dieser Materien bekannt
ist,

ist, so werdet ihr sie auch von den übrigen erhalten.

Aufgabe.

§. 359. Wie die Verhältnisse der eigenthümlichen Schwere von verschiedenen festen Körpern durch Abwägung in der freien Luft und in einer flüssigen Materie zu finden?

Auflösung: Erster Satz wenn die Körper eine grössere eigenthümliche Schwere als die flüssige Materie haben:

1. Hängt die vorhabenden Körper einen nach dem andern an eine Schnure oder Faden, dessen Schwere man als nichts ansehen kan, an einen Wagebalken, wieget sie in der Luft ab, und machet sie alle von einerlei Schwere.

2. Wieget sie auch in einer flüssigen Materie z. B. in Wasser, und sehet zu, was jeder an seinen Gewichte verlieret.

3. Sehet: wie der Verlust des ersten Körpers zu dem Verlust des andern, eben so verhält sich die eigenthümliche Schwere des andern, zur eigenthümlichen Schwere des ersten §. 352. wenn ihr nun mit allen übrigen Körpern so verfähret, und die eigenthümliche Schwere von einem derselben schon bekannt ist, so findet ihr solche durch die angelegte Proportion von allen übrigen.

Zweiter Satz: Wenn die Körper eine mindere eigenthümliche Schwere als die flüssige Materie haben.

1. Nehmet einen beliebigen Körper P, der von einer grössern eigenthümlichen Schwere als die flüssige Materie ist, und der an den leichtern angehangen in derselben

B. eingetaucht. fest. Körper. in flüssige Mater. 289

ben samt dem andern unterfinke; wäget P in der freien Luft, und in der flüssigen Materie ab, und merket sowohl sein Gewicht, als auch den Verlust den er daran in der flüssigen Materie leidet.

2. Wäget auch einen der vorhabenden Körper A von minderer eigenthümlicher Schwere in freier Luft.

3. Hängt beide Körper A und P zusammen, wieget sie sowohl in freier Luft als in der flüssigen Materie, und merket was sie in dieser von ihrem Gewicht verlieren.

4. Ziehet diesen Verlust von der Summe ihres Gewichts, daß sie zusammen in freier Luft haben, ab, so wird der Unterschied das Gewicht anzeigen, welches die flüssige Materie unter einem Volumen hat, so dem von beiden Körpern gleich ist.

5. Ziehet endlich von diesem Unterschied den Verlust ab, welchen der Körper P in der flüssigen Materie allein erlitten hat, so wird der Ueberrest das Gewicht eines Volumens der flüssigen Materie anzeigen, daß dem Volumen des leichtern Körpers A gleich ist; und wie sich das Gewicht dieses Volumens der flüssigen Materie zum Gewicht des Körpers A in freier Luft verhält, eben so verhält sich die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie, zur eigenthümlichen Schwere des leichtern Körpers A.

6. Verfahret nun mit den übrigen vorhanden habenden Körpern auf die nehmliche Art, nachdem ihr sie alle mit A von gleichen Gewicht gemacht habt, so werdet ihr auch die Verhältnisse finden, die ihre eigenthümliche Schwere untereinander haben.

A u f g a b e.

§. 360. Wie an einem aus zwei verschiedenen Metallen zusammengemischten Körper die Menge eines jeden Metalls insbesondere zu finden? vorausgesetzt, daß diese Metalle ihr Volumen nach geschehener Vermischung nicht ändern.

Auflösung: 1. Wäget den gegebenen gemischten Körper in freier Luft, und in einer flüssigen Materie z. B. im Wasser, und merket sein Gewicht P in der Luft, und den Abgang L desselben im Wasser.

2. Suchet das Gewicht eines gewissen Volumens z. B. eines Kubitschuhes sowohl von dem leichtern als schwerern Metalle, aus welchen der Körper zusammengemischt ist, und auch das Gewicht eines Kubitschuh Wassers nach einer der oben beschriebenen Arten.

3. Suchet, wie viel der Körper im Wasser verlieren würde, wenn er ganz vom leichtern Metal wäre; in dieser Absicht betrachtet, daß das Gewicht eines kubischen Schuhes desselben soviel im Wasser verliere, als das Gewicht eines Kubitschuh Wassers beträgt, §. 348. folglich könnt ihr setzen: wie das Gewicht eines Kubitschuhes des leichtern Metalls, zum Gewicht eines Kubitschuh Wassers: eben so verhält sich das ganze Gewicht P des gegebenen Körpers zu dem Verlust C , den er im Wasser leiden würde, wenn er ganz von dem leichtern Metalle wäre.

4. Auf eben diese Art suchet auch den Verlust, so der Körper im Wasser leiden würde, wenn er ganz von dem schwerern Metal wäre, indem ihr setzt: wie das Gewicht eines Kubitschuhes des schwerern Metalls zum Gewicht eines Kubitschuh Wassers, so verhält sich das Gewicht P des gegebenen Körpers zu dem Verlust

B. eingetaucht, fest. Körper. in flüssige Mater. 293

luft K, den er im Wasser leiden würde, wenn er ganz von dem schwerern Metal wäre.

5. Zieheth den Verlust des schwerern Metals von dem Verlust des leichtern ab, und merket den Ueberrest $C - K$ auf.

6. Zieheth auch den Verlust des schwerern Metals von dem Verlust des gemischten Körpers ab, und bemerket ebenfalls den Ueberrest $L - K$.

7. Setzet: wie der erste Ueberrest zum zweiten, eben so verhält sich das Gewicht des gemischten Körpers zum Gewicht X des darinn enthaltenen Theils des leichtern Metals

$$\text{d. i. } C - K : L - K = P : X$$

so ist: $P \times \frac{(L - K)}{C - K} = X$ dem Gewichte des leichtern Metals; und $P - X = Y$ dem Gewichte des schwerern Metals.

Beispiel

Es seie ein Körper vom Kupfer und Zinn zusammengemischt gegeben, und man verlangt das Gewicht von jedem Metalle insbesondere zu wissen.

Ferner seie, daß der gegebene Körper in freier Luft 100 lb wäge, im Wasser aber 12 lb davon verliere. Dann nehmen wir als schon bekannt an, daß der Kubitschuh Zinn 417 lb & der von Kupfer 500 lb und der von Wasser 57 lb seie.

Derowegen können wir erstlich nach N. 3. setzen:

$$417 : 57 = 100 : C,$$

$$\text{und } \frac{100 \times 57}{417} = C = 13 \frac{41}{417} \text{ dem Ver-}$$

lust, welchen der Körper im Wasser an seinen Gew.

492 III. Abschnitt. II. Hauptstück.

Gewicht leiden würde, wenn er ganz von Zinn wäre.

Und nach Nr. 4.

$$500 : 57 = 100 : K.$$

und $\frac{100 \times 57}{500} = K = 11\frac{4}{5}$ dem Verlust;

welchen der Körper im Wasser an seinem Gewicht leiden würde, wenn er ganz von Kupfer wäre.

Dann ist nach Nr. 5.

$$13\frac{1}{4} - 11\frac{4}{5} = 2\frac{1}{10} = C - K.$$

Und nach Nr. 6.

$$12 - 11\frac{4}{5} = \frac{1}{5} = L - K.$$

Und nach der Nr. 7. gegebenen Formel

$$P \times \frac{(L - K)}{C - K} = X$$

ist $\frac{100 \times \frac{1}{5}}{2\frac{1}{10}} = \frac{60}{2\frac{1}{10}} = \frac{60}{\frac{21}{10}} = \frac{60 \times 695}{1577}$
 $= \frac{41700}{1577} = 26\frac{448}{1577}$ Th Zinn, so in dem gemischten Körper enthalten ist.

Und $100 - 26\frac{448}{1577} = 73\frac{1129}{1577}$ Th Kupfer so den übrigen Teil des Körpers ausmacht.

Diese ist jene berühmte Aufgabe, welche der König Hiero von Syracus dem Archimedes gegeben hat, als er eine goldene Krone machen liesse, und zu wissen verlangte, ob ihn der Goldarbeiter nicht betrogen habe. Man kan diese Aufgabe gleichsam als den Ursprung der Hydrostatik ansehen, weil sie, soviel bekant ist, am ersten Gelegenheit gegeben, über diese Materie nachzudenken. Wir können aber die Anfänger nicht unerinnert lassen, daß zur richtigen Auflösung dieser Aufgabe hauptsächlich folgende zwei Bedingungen nöthig sind. Erstlich müssen beide Metalle, woraus die

Ver-

B. eingetaucht. fest. Körper in flüssige Mater. 293

Vermischung besteht, rein, und mit keinen dritten vermischt seyn. Zweiten müssen sie nach der Vermischung das nehmliche Volumen behalten, was sie zuvor hatten. Die Erfahrung aber lehret, daß viele Materien, wenn sie mit andern vermischt werden, ihr Volumen beträchtlich ändern; so machet 1 Kubitschuh Zinn und 1 Kubitschuh Kupfer nach ihrer Vermischung nicht 2 Kubitschuh sondern etwas weniger aus. Eben so ist es mit Zinn und Blei; das Gegentheil aber geschieht mit Zinn und Zink, und mit Blei und Wismuth. Ein mehreres kan man in den petersburger Akten nachlesen. Eben auf diese Art wird das Volumen von einigen flüssigen Materien z. B. von süßen und gesalzenen Wasser; von Vitriolöl und Wasser; von Weingeist und Wasser nach ihrer Vermischung etwas kleiner.

Obwohl verschiedene Arten die eigenthümliche Schwere der Körper zu finden oben angegeben worden, so wollen wir doch der Bequemlichkeit willen die Verhältnisse derselben von verschiedenen Materien in einer Tafel hersezen; zu gleich aber die Anfänger erinnern, daß, da die eigenthümliche Schwere von einer Materie von einerlei Art und unter gleichen Volumen öfters merklich verschieden angetroffen wird, es also sehr schwer ist, hierüber gänzlich richtige Bestimmungen zu machen. Sie haben sich daher nicht zu wundern, wenn sie oft in verschiedenen Autoren verschiedene Bestimmungen der Schwere der Materien antreffen. Nachstehende sind meistens aus Müschenbroeck genommen, weil sie fast durchaus für die bewehrtesten angenommen werden.

T a f e l

der Verhältnissen
der eigenthümlichen Schwere von verschiedenen
Materien.

Flüssige Materien.

Regenwasser.	1,000
Flußwasser.	1,009
Distillirteswasser.	0,993
Brunnwasser.	0,999
Meerwasser.	1,030
Scheidwasser.	1,300
Luft.	0,001 $\frac{1}{4}$
Reinöhl.	0,932
Baumöhl.	0,913
Steinöhl.	0,703
Terpentinöhl.	0,792
Weinsteinöhl p. deliq.	1,550
Bitriolöhl.	1,700
Menschenblut.	1,040
Gemein Salpetergeist.	1,315
Terpentinegeist.	0,874
Abgezogener Weingeist.	0,874
Weinessig.	1,011
Burgunderwein.	0,953
Moslerwein.	0,916
Bitriolgeist.	1,203
Distillirter Essig.	1,030

B. eingetaucht: fest. Korp. in flüssige Mater. 295

Metalle und Mineralien.

Reinstes Gold.	19,640
Dukatengold.	18,261
Reines Silber.	11,091
Deutsches Quecksilber.	14,000
Japanisch Kupfer.	9,000
Schwedisch Kupfer.	8,784
Ungarisches Eimentkupfer.	5,771
Gegossener Messing.	8,000
Geschlagener Messing.	8,349
Fein Zinn.	7,320
Englisch Zinn.	7,295
Zinn.	7,350
Sehr harter Stahl.	7,704
Weicher Stahl.	7,738
Feder Stahl.	7,803
Feines Eisen.	7,645
Gegossenes Eisen.	7,114
Geschmiedtes Eisen.	8,286
Deutsches Blei.	11,310
Englisch Blei.	11,325
Bismuth.	9,700
Deutsches Spiesglas.	4,000
Ungarisches Spiesglas.	4,700
Tyroler Zinober.	7,300
Gemachter Zinober.	8,200

Stein und Erdarten.

Demant.	3,517
Alabaster.	1,872
Weisse Kreide.	2,252
Bergcrystal.	2,652
Böhmisch Granat.	4,360
Jaspis.	2,666

296 III. Abschnitt. II. Hauptstück.

Weisser Marmor.	2,707
Grünesglas.	3,620
Bachsand.	1,900
Gemeiner Sand.	1,631
Magnet	4,585
Undurchsichtige Feuerstein.	2,542
Durchsichtig detto.	2,641
Weiß englisch Glas.	3,150
Fruchtbare Erde.	1,630
Gebrante Ziegel.	2,006
Laimerde.	1,929
Kieselstein.	2,542
Gips.	1,228

Salze und Leime.

Natürlich rother Schwefel.	2,871
Lebendiger Schwefel.	2,000
Ord. gegossener Schwefel.	1,800
Alaun.	1,714
Salpeter.	1,900
Sal amoniae.	1,453
Roher Weinstein.	1,849
Präparirter Weinstein.	1,900
Weisser Vitriol.	1,900
Kampfer.	0,996
Gelbes Wachs.	0,955
Arabischer Gummi.	1,375
Weihrauch.	1,071
Meersalz.	1,130
Pech.	1,150
Schiespulver.	0,914
Grünspan.	1,714
Englisch Vitriol.	1,880

504

Holzarten.

Schwarz Eben.	1,177
Roth Brasil.	1,031
Burbaum.	1,030
Rothsandel.	1,128
Pantoselholz.	0,240
Laxis.	0,760
Eichen.	0,929
Steineichen.	1,143
Trocken Eichenholz.	0,857
Zwetsgenbaum.	0,663
Erlen.	0,530
Ceder.	0,613
Ahorn.	0,755
Eschen.	0,845
Buchen.	0,855
Nusbaum.	0,600
Rusten.	0,600
Weiden.	0,543
Fichten.	0,550

Gleichwie die Ausdehnungen der Körper wieder mit solchen, d. i. Linien mit Linien, Flächen durch Flächen, und Körper durch Körper ausgemessen werden, eben so wird die Schwere der Materien durch die Schwere anderer Körper, welche bekannter Maassen Gewichter genent werden, d. i. durch Pfunde, Lothe u. s. w. abgewogen. So wie aber die Maasstäbe in verschiedenen Ländern und Orten verschieden sind, eben so geschihet es mit den hie und da üblichen Gewichten. Da aber sehr oft daran gelegen ist den Betrag eines gewissen Gewichts in einen andern zu wissen, so

fügen wir die Verhältnisse der in einigen Orten üblichen Pfundgewichte in nachstehender Tafel bei, woraus der Betrag eines jeden gegebenen Gewichts in einem andern verlangten durch die Regel de tri leicht zu finden ist. So wie aber die genaue Bestimmung der Maasverhältnisse ihre Schwierigkeiten hat, so hat es die richtige Bestimmung der Verhältnissen von den verschiedenen Gewichten noch weit mehr, daß es daher kein Wunder ist, wenn man sie oft sehr verschieden antrifft.

Gegenwärtige Verhältnisse der Gewichte sind aus Klausbergs demonstrativen Rechenkunst genommen und ohne sonstiger Veränderung nur in diese etwas bequemere Form gebracht worden.

Verhältnisse verschiedener Pfundgewichte.

Amsterdamer.	8125
Bologneser.	5958
Berliner.	7697
Breslauer.	6667
Brüssler.	7710
Cöln am Rhein.	7680
Kopenhagener.	7716
Florentiner.	5581
Frankfurter am Main.	7683
Genueser.	5208
Genfer.	9075
Hamburger.	7980
Leipziger.	7680
Livorner.	5605
Londner.	7434
Münchener.	9225
Neapolitaner.	6983
Münchener.	Münchener

B. eingetaucht. fest. Körper. in flüssige Mater. 299

Münberger.	8385
Pariser.	8065
Petersburger.	6723
Prager.	8450
Römischer.	5581
Strassburger.	7755
Venetianer fl. gr.	4959
Wiener.	9240

Vierter Abschnitt.

**Von den Eigenschaften und Kräften
der Luft.**

Erstes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Luft überhaupt.

Erklärung.

§. 361.

Die flüssige Materie, welche die ganze Erde umgibt, und, wenn sie nicht durch andere Körper verhindert wird, allen leeren Raum erfüllet, wird die Luft genant. Die Ausdehnung aber, in welcher sie die Erde umgiebt, heist der Dunstkreis (Athmosphæra).

Obwohl die Luft unsichtbar ist, so kan man sich von ihren würllichen Dasein an allen Orten auf

auf vielfältige, am leichtesten aber auf folgende Art überzeugen, wenn man nehmlich eine Fläche oder Körper etwas geschwinder bewege, und einen Wind fühlet, welcher nichts anders als die Luft ist, die durch die Bewegung des Körpers oder der Fläche aus ihrer Stelle gedrückt wird, ihre Gegenwart durch ein gewisses Geräusche oder Anstossen an einen andern Körper verräth, und solchergestalt einen Widerstand verursacht.

Damit man die Eigenschaften, der Luft genauer und bequemer zu untersuchen im Stande ist, hat man eine besondere Maschine, die man die Luftpumpe nennet, erdacht. Ihre Einrichtung und Beschaffenheit ist verschieden, und bald mehr bald weniger zusammengesetzt. Ihr Hauptendzweck aber ist allemal, daß man mittelst derselben die in einem hollen Körper befindliche Luft herausziehen könne. Desters wird sie auch so eingerichtet, daß man in einen hollen Körper noch mehrere Luft hineinpumpen kan. Um aber den Anfängern einen deutlichen Begriff von dieser Maschine zu machen, so stellen wir eine der einfachesten und bequemsten Luftpumpen in der 16 Tafel, und zwar fig. 128. wie sie von vorne anzusehen, und fig. 129. im Durchschnit nach der Länge vor, und geben ihnen folgende Erklärung:

Fig. 128.
u. 129.

AB ist eine eiserne Hebelstange, an deren Achse ein Sternrad I befestiget ist, welches in die Zähne der beiden eisernen Kolbenstangen GH eingreift, und dieselben durch die wechselweise Bewegung des Hebels mit ihren Kolben HH in den Stifeln CC auf und nieder treibet. Die Stifel haben

Von den Eigenschaften der Luft überhaupt. 301

haben beiläufig 2 Zoll im innern Durchmesser, und 9 Zolle zur Länge, müssen vollkommen gleichweit und glat ausgerieben sein, damit zwischen dem Leder des Kolbens und der innern Seiten des Stifels keine Luft durchdringen kan. Beide Stifel sind untenher durch ein eingeschraubtes Bodenstück geschlossen; dieses aber hat in der Mitte ein kleines Löchlein D, welches bis in die unten befindliche Querröhren OO gehet, und beide Stifel vereiniget. Über den obern etwas in den Stifel herfürragenden Teil dieses Bodenstückes wird ein kleiner Streif von einer Schweinsblase gebunden, damit er das in der Mitte befindliche Löchlein D bedecke, wie aus der 130. fig., welche diese Stücke etwas vergrößert im Grund und Durchschnitt vorstellet, etwas deutlicher zu sehen ist. Fig. 130.

Durch die Mitte des Kolbens gehet eine Röhre welche bei E bis auf ein kleines Löchlein geschlossen ist, und das ebenfalls obenher auf gleiche Art wie das am Bodenstück mit einem kleinen Streif einer Schweinsblase verbunden wird, wie ein dergleichen Kolben fig. 131. im Grundris und Durchschnitt etwas vergrößert zu sehen ist. Fig. 131.

An die Mitte der Querröhre OO wird eine längere Röhre OP, fig. 129. angeschraubet; diese ist bei P aufwärts gebogen, und gehet durch den metallenen runden Teller RR, auf welchen die Gefäße wie S eines ist, gestellet werden, um die Luft daraus zu ziehen. Fig. 129.

Bei N ist eine Pippe angebracht, mittelst welcher man alle Gemeinschaft der Luft zwischen dem Gefäß S und den beiden Stifeln aufheben kan, wenn

wenn die Luft einmal ausgezogen ist. Durch den Hahn dieser Pippe geht noch ein Löchlein bis in die Röhre OP, welches ebenfalls ihren wohl eingeriebenen Stöpsel L von Metal hat, solches dienet, die Luft wider in das Gefäß S zu lassen, ohne nöthig zu haben die Pippe selbst zu öffnen, oder die Gemeinschaft mit den Stifeln herzustellen.

An allen Orten wo Teile an dieser Maschine zusammen geschraubet werden, die die Luft nicht durchlassen sollen, wird ein in Oehl getränktes Leder darzwischen gelegt; ebenfalls wird der Teller RR mit einem solchen Leder bedeckt, welches nur in der Mitte, wo die Röhre OP in den Teller geht, etwas ausgeschnitten wird; damit sich das Gefäß nach ausgezogener Luft fest gegen dem Teller andrucke, und keine Luft von aussen hinein dringen könne. Eben so werden auch die Streifen von der Schweinsblase, welche an das Bodestück und an den Kolben gebunden, und die Stelle der Ventile vertreten, etwas mit Oehle feucht gemacht.

Wenn also nach dieser Einrichtung der Luftpumpe die Hebelstange AB wechselweise auf und nieder bewegt wird, so werden auch die Kolben in beiden Stifeln auf eben diese Art bewegt, und indem der erste hinauf geht, so drückt die äussere Luft auf die an demselben befindliche Blase, verschliesst das Löchlein daselbst, und da zwischen dem Kolben und dem Bodestück des Stifels ein leerer Raum entstehet, so suchet sich die in dem Gefäß S enthaltene Luft auszudehnen, sie drückt daher die über das Löchlein im Bodestück gebundene Blase etwas in die Höhe, und bringet aus dem

Von den Eigenschaften der Luft überhaupt. 303

dem Gefäße S durch die offene Pippe N in den Stifsel, sobald aber der Kolben wieder hinabgetrieben wird, so wird die nun in dem Stifsel befindliche Luft zusammengedrückt, die Blase schließt sich an das Bodestück an, und lasset keine Luft in das Gefäß zurück; die Blase an dem Kolben hingegen wird von der in dem Stifsel zusammengedrückten Luft etwas in die Höhe gehoben, und läßt der in dem Stifsel befindlichen Luft freien Ausgang.

So wie alles dieses bei einem Stifsel geschieht, eben so geschieht es wechselweise bei dem andern, dergestalt, daß so oft als der Kolbe in einem Stifsel einmal auf und abgegangen, allemal soviel Luft aus dem Gefäße ausgezogen wird, als ein solcher Stifsel fassen kan; wenn anders die Luftpumpe vollkommen gut ist.

Ubrigens siehet man von selbst, daß man sich auch mit einem Stifsel allein behelfen könnte, und daß zween das Ausziehen der Luft nichts als geschwinde machen.

Damit man auch wissen möge, um wie viel die Luft in einem auf dem Teller gestellten Gefäß nach einer gewissen Anzahlbewegungen des Kolbens in dem Stifsel, oder nach einer Anzahl Züge verdünnet worden, vorausgesetzt, daß die Luftpumpe vollkommen gut sei; so setze man, daß die Dichtigkeit oder Schwere der Luft in den Gefäße vor dem Ausaugen = P; die Luft, welche nach dem ersten Zug in dem Gefäße zurück bleibt = 1R, nach dem zweiten = 2R; nach dem dritten = 3R u. s. w. sei; ferners sei der Inhalt des
Ge.

Gefäßes $= S$, und der Inhalt eines Stifels $= C$; so ist der Ueberrest der Luft in dem Gefäße nach dem 1ten Zug: $S + C : C = P : 1R$

2ten Zug: $S + C : C = 1R : 2R$

3ten Zug: $S + C : C = 2R : 3R$

und überhaupt, wenn man die Anzahl der geschehenen Zügen mit n benennet, so ist:

$$S + C : C = (n - 1) R : nR$$

und $(S + C)^n : C^n = P : nR$.

D. i. wie die Summe des Inhaltes des Gefäßes und eines Stifels auf die so vielte Potenz erhoben, als Züge geschehen sind, zu dem Inhalt des ~~Gefäßes~~ ~~Stifels~~ ebenfalls auf die so vielte Potenz erhoben als Züge gemacht worden; eben so verhält sich die Dichtigkeit oder Schwere der zuerst in dem Gefäß gewesenen Luft zu derjenigen, welche sich nach der Anzahl der gemachten Züge noch in demselben befindet.

Wenn man einen Barometer dergestalt bei der Luftpumpe anbringt, daß dessen unteres Gefäß unter das Gefäß, woraus die Luft gezogen wird, zu stehen kommt, so kann man durch das Fallen des Quecksilbers in der Barometerrohre erkennen, ob die Luft bei jedem Versuch gleich viel ausgezogen wird, davon die Ursach weiter unten vorkommen wird. Wolte man die Luftpumpe so einrichten, daß die Luft in ein Gefäße gepumpet, und folglich verdichtet werden könnte, so hätte man nur den Kolben, und das Bodenstück des Stifels so anzuordnen, daß man die Blasen in beiden anstaat wie ist obenher, alsdenn untenher aufbinden kan, damit die Defnung derselben verkehrt geschehe.

Erfahrung.

§. 362. Wenn man ein gläsernes Rohr AB an Fig. 132. einem Ende A mit dem Daumen zupfäßt, und das andere B in ein mit Wasser angefülltes Gefäß tauchet, so bringet unten etwas Wasser in das Rohr etwan bis zu C, und zwar um so mehr, als das Rohr tiefer eingetaucht wird; und wenn man sie wieder herausziehet, so gehet auch das Wasser wieder aus demselben.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 363. Aus dieser Erfahrung ist also zu schließen, daß, da die in dem Rohr befindliche Luft bei dem Eintauchen oben durch den Daumen, unten aber durch das Wasser herausgehen gehindert wird, und dennoch Wasser in das Rohr bringet, die Luft nothwendig in ein kleineres Volumen zusammengeedrückt werden müsse, und zwar um so mehr, als mehr Wasser von unten in das Rohr bringet, oder dasselbe tiefer eingetaucht wird.

Erfahrung.

§. 364. Wenn man eine hohle Kugel A, die mit Fig. 133. einer Oefnung D, welche sich durch eine Pippe B sperren und öfnen läßt, auf die Luftpumpe schraubet, und nach geöffneter Pippe B noch mehr Luft in dieselbe pumpt, dann die Pippe sperrt, die Kugel von der Maschine abschraubet, und die Pippe wieder öfnet, so bringet die Luft mit einem Getöse aus der Oefnung.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 365. Es läßt sich daher in einen bestimmten Raum mehrere Luft zusammenpressen, oder dichter machen, als sie sonst vermög ihren natürlichen Zustand wäre.

Erfahrung.

§. 366. Man binde die Oefnung einer unaufgeblasenen Schweinsblase, in deren Falten nur wenig Luft enthalten ist, fest zu, lege sie unter die Glocke der Luftpumpe, und ziehe die Luft aus derselben, so wird die Blase sich nach jedem geschehenen Zug immer mehr aufblasen, bis sie ganz vol ist. Läßt man aber die Luft wieder unter die Glocke, so fällt die Blase auch wieder zusammen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 367. Aus dieser Erfahrung siehet man, also, daß eine nehmliche Menge Luft bald einen grössern, bald einen kleinern Raum ausfüllen könne, und sich also ausdehnen oder verdünnen lasse; und diese Ausdehnung geschieht alsobald, als die Luft, so die Blase von aussen umgiebt selbst dünner gemacht wird, sobald also die Luft irgendwo dünner wird: so suchet sich die neben befindliche dahin auszudehnen, bis sie selbst so dünne als in den Nebenort geworden ist. Eben daher kan niemals ein luftleerer Raum entstehen, es wäre denn, daß die Luft in denselben zu bringen durch einen andern dichten Körper gehindert würde.

Erfahrung.

§. 368. Bringt man eben eine solche Blase wie zuvor gemeldet worden, mit der Vorsicht an ein Feuer, daß sie sich nicht anbrenne, oder an einen warmen Ofen, so wird sie sich nach und nach selbst aufblasen; bringt man sie aber alsdenn in einen kalten Ort, so komt sie wieder in ihren vorigen Zustand, oder fället zusammen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 369. Daraus ist also abzunehmen, daß die Wärme die Luft in der Blase ausdehnen, und ihr einen größern Raum einnehmen mache, und daß die Kälte das Gegentheil verursache. Folglich daß überhaupt die Wärme und Kälte in der Dichtigkeit der Luft eine große Veränderung verursachen könne.

E r f a h r u n g.

§. 370. Blasct man eine Blase auf, oder häufet die Luft in dieselbe, und sticht mit einer Nadel auf was immer für einer Seiten hinein, so dringt die Luft daselbst alsobald mit Gewalt heraus, bis sie mit der äussern wieder im Gleichgewicht ist.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 371. Es ist daher klar, daß sich die Luft nach allen Seiten und zwar so lang auszudehnen suche, bis sie mit der benachbarten Luft wieder von gleicher Dichtigkeit ist.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 372. Da man aus den angeführten Erfahrungen siehet, daß die Luft, durch was immer für eine Kraft zusammengedrückt oder ausgedehnet, sich so gleich, als die Ursache ihrer Zusammenbrückung oder Ausdehnung zu wirken aufhöret, wieder in ihren vorigen Zustand zu setzen sucht, so ist zu schliessen, daß die Luft eine Federkraft habe, oder elastisch seie, und daß sie durch diese Kraft nach allen Seiten eben so stark zurück würde, als sie von einer andern Kraft zusammengedrückt, oder ausgedehnet wird.

Die vielfältige Erfahrung lehret, daß die Ausdehnung und Zusammendrückung der Luft, oder ihre Federkraft ungemein groß sein könne, und auch nach sehr langer Zeit an diesen Vermögen nicht den mindesten Abgang oder Verminderung leide. Man siehet an den sogenannten Windbüchsen mit welcher Gewalt, und auf welche Weite eine in dieselbe geladene Kugel durch die Ausdehnungskraft der in die Flasche zusammengepresten und losgelassenen Luft getrieben wird, wenn sie auch noch so lang geladen ist. Es ist auch bekannt, was für große Lasten bloß durch die Ausdehnung der Luft in gewissen eigens erfundenen Maschinen, deren Beschreibung hier zu weitläufig wäre, aufgehoben, und bewegt werden können, davon die in den ungarischen Bergwerken befindliche sogenannte Luftmaschine, welche zum Wasserschöpfen angewandt ist, zu einem besondern Beispiel dienet. So groß aber auch die ausdehnende oder die elastische Kraft der Luft an sich ist, so hat sie doch auch ihre gewisse von der Natur festgesetzte Gränzen, die sie nicht überschreiten kan. Insgemein wird mit Hr. Boyle angenommen, daß die Luft sich in ein 4000mal größeres Volumen ausdehnen könne, als ihr natürlicher Zustand ist; und Hales sagt, er habe die Luft in einen 1838mal kleinern Raum zusammengepreßet, als sie zuvor einnahm, so daß sie alsdenn doppelt so dicht als Wasser war. Nebst diesem giebt der berühmte Hr. Euler vor, daß die Luft an der Oberfläche der Erde mit einer solchen Geschwindigkeit in einen luftleeren Raum einzubringen suche, als ein frei fallender Körper aus einer Höhe von 29100 rheinländischen Schuhen erlangen würd.

würde, welches in einer Sekunde 1348 Schuh macht.

Erfahrung.

§. 373. Wenn man aus einer hohlen Kugel A Fig. 133. mittelst der Luftpumpe die Luft herausziehet, dann die Pippe B schließet, und die Kugel genau, wie gewogen, darnach aber die Pippe B wieder öffnet, damit die Luft hinein kan, so wird die Wage gleich einen Ausschlag geben, und die Kugel schwerer als da sie Luftleer war, befunden werden. Wecket man nun ihr Gewicht auf, bringet sie abermal auf die Luftpumpe, pumpet soviel Luft hinein, als sich thun läßt, und wäget sie abermal, so wird man sie noch schwerer als das vorigemal finden. Öffnet man endlich die Pippe B nochmal, um die zusammengepreste Luft herauszulassen, so wird die Kugel wieder ihr voriges Gewicht erhalten.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 374. Daraus ist also klar zu erkennen, daß die Luft schwer sei, und zwar um so schwerer, als sie in einen gewissen Volumen dichter ist.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 375. Da die Luft eine Schwere hat, so sucht sie sich dem Mittelpunt der Erde zu nähern, folglich drückt sie gegen alle unter ihr befindliche Körper, und also auch die höhere Luft auf die niedere. Je höher demnach eine Luftsaule ist, je mehr wird die untere Luft von der obern gedrückt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 376. Weil also die Luft in unserm Dunstkreise unten oder nahe an der Oberfläche der Erde mehr von

der oben gedrückt wird, als in einer größern Höhe über derselben, so mus sie daselbst auch dichten sein. Die Dichtigkeit des Dunstkreises kan also nicht in allen Orten gleich sein, sondern mus abnehmen wie seine Höhe zunimt; oder die Luft mus immer dünner werden, so wie sie von der Oberfläche der Erde weiter entfernt ist; und weil die Federkraft der Luft ihrer Zusammendrückung gleich ist, so mus auch die Luft unsers Dunstkreises mehr Federkraft haben, nachdem sie von der oben mehr gedrückt wird, oder der Erde näher ist; wenn dieselbe nicht durch Wirkung fremder Ursachen verhindert wird.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 377. Da ein in der Luft befindlicher Körper auf allen Seiten von ihr umgeben ist, so wird auch ein ieder Punkt seiner Oberfläche durch eine darauf ruhende Luftsäule gedrückt, die die Höhe des Dunstkreises zur Höhe hat; da aber die Höhen derselben auf allen Seiten gleich sind, so wird auch der Körper auf allen Seiten gleichstark gedrückt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 378. Der gesamte Druck also, welchen ein in der Luft befindlicher Körper von derselben zu leiden hat, ist gleich der Schwere einer Luftsäule, die die Oberfläche des Körpers zur Grundfläche, und die Höhe des Dunstkreises zur Höhe hat.

Wenn man dem zu folge die Oberfläche des ganzen menschlichen Körpers = 20 Quadratschuh annimt, so hat derselbe durch den Druck des Dunstkreises beständig eine Last von 40000 lb auf sich. Es ist für sich klar, daß er diese Last unmöglich aushalten könnte, wenn nicht der Druck auf

Von den Eigenschaften der Luft überhaupt. 311

auf allen Seiten gleich wäre, daher wir ihn auch eben so wenig als den Druck des Wassers empfinden, wenn wir auch noch so tief in demselben versenkt sind.

Z u s a m m e n f a s s u n g

§. 379. Deme ungeachtet ist die Luft in einem Gefäße, oder in mehreren die mit einander Gemeinschaft haben, wenn sie nicht von ganz ungewöhnlicher Größe sind, in allen Orten derselben von gleicher Dichtigkeit, weil der Unterschied der Höhen des Dunstkreises in denselben nicht beträchtlich genug ist, daß der verschiedene Druck der obern und untern Theile schon merklich werden könnte.

E r f a h r u n g.

§. 380. Wenn man stark riechende Materien abrauchen läßt, so verspüret man ihren Geruch in der Luft oft auf eine beträchtliche Weite. Eben so nimt man bei nebligten Wetter die Feuchtigkeith augenscheinlich wahr, u. m. d. gl.

Z u s a m m e n f a s s u n g

§. 381. Da also die in Dünste aufgelöste Materien in der Luft schwimmen, so müssen sie leichter als dieselbe seyn; und da dergleichen Auflösungen und Ausdünstungen verschiedener Materien in der Natur stäts vorgehen, so kan auch die Luft wenigstens nahe an der Oberfläche der Erde nicht ohne fremde Körper, oder ganz rein seyn, und diese fremde Körper werden in der Luft um so leichter schwimmen, als sie selbst leichter sind, oder die Luft schwerer ist. §. 347. Da ferner die Luft in größern Höhen des Dunstkreises immer leichter wird, §. 376. so können auch die Dünste von

fremden Materien nur bis auf eine gewisse Höhe in denselben steigen, daher wird auch die Luft, je höher sie über der Oberfläche der Erde ist, um so reiner sein.

Erfahrung.

Fig. 134. S. 382. Stellet einen messingenen Cylinder A der auf beiden Enden offen ist, auf den Teller der Luftpumpe, leget oben über die Oefnung ein nasses Leder, und eine Glasscheibe darauf, so werdet ihr solche ohne einigen Widerstand zu empfinden, wieder hinwegnehmen können; leget sie aber wieder darauf, und pumpt etwas Luft aus dem Cylinder, so werdet ihr schon einige Gewalt anwenden müssen, um sie hinweg zu nehmen; fahret ihr aber fort mit Auspumpen, so wird endlich die Glasscheibe mit Gewalt zerspringen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

S. 383. Daraus läßt sich also abnehmen, daß, so lang die Luft auf allen Seiten gleich gegen einen Körper drücket, man auch keinen Widerstand von derselben spüret, sobald aber die Luft auf einer Seite dünner gemacht wird, so drückt sie auf der andern mehr entgegen, und man hat alsdenn diesen Druck zu überwinden, wenn man den Körper bewegen wil, wird endlich die Luft auf einer Seite so dünne gemacht, daß der Druck auf der andern Seite so groß wird, daß der Körper ihn nicht mehr widerstehen kan, so zerbricht sie ihn.

Noch eine überzeigende Erfahrung von der Gewalt des Druckes der Luft, wenn er nur gegen eine Seite allein wücket, an der andern aber zu wirken gehindert wird, kan man an den sogenannten magdeburgischen Halbkugeln sehen, welche,
nach

Von den Eigenschaften der Luft überhaupt. 313

nachdem die Luft aus ihnen gezogen worden, so stark zusammenhangen, daß sie mit vieler Gewalt nicht auseinander gebracht werden können.

Er f a h r u n g.

§. 384. Wenn man auf die obere Oefnung B ei. Fig. 135. nes hohlen Cylinders A, der unten mit einem starken Boden versehen ist, eine Glasscheibe fest anfüget, hierauf solchen unter die Glocke der Luftpumpe stellet, und die Luft aus derselben zieht, so verspringt die eingesetzte Glasscheibe in Stücken.

Z u s a z.

§. 385. Es läßt sich also daraus schließen, daß die in dem Cylinder enthaltene Luft, nachdem dieselbe aus der Glocke gepumpt worden, sich so gewaltig ausdehnet, daß sie die Glasscheibe sowohl versprengen könne, als wenn sie wie zuvor aus dem Cylinder gepumpt wäre, und die äussere Luft darauf drückte.

Daher geschihet es, daß eine wohl verstopfte gläserne Flasche auf einen warmen Ofen gestellt verspringet.

Zweites Hauptstück.

Von dem Gleichgewicht der Luft mit andern flüssigen Materien.

Er f a h r u n g.

§. 386. Wenn man eine über 32 Schuh lange Fig. 136. Röhre AC, welche an ihren beiden Enden durch angebrach-

brachte Pippen geschlossen und geöffnet werden kan, von oben mit Wasser anfüllet, nachdem man die untere Pippe zuvor geschlossen hat, hierauf in ein mit Wasser angefülltes Gefäß D stellet, und die Pippe C öfnet, so fallet das Wasser in der Röhre soweit herab, daß es mit dem in dem Gefäße befindlichen gleiche Höhe bekommt.

Wird aber die Pippe bei A eher geschlossen, als die bei C eröffnet wird, so fällt das Wasser in der Röhre nach Eröffnung der untern nur bis in B, und wird daselbst beiläufig um 32 Schuh höher als in dem Gefäße D stehen bleiben.

Wird aber die Röhre nur etwann bis in E mit Wasser gefüllet, so daß zwischen der Pippe A und dem Wasser noch ein mit Luft angefüllter Raum bleibet, und die Pippe A wird hierauf geschlossen, und C eröffnet, so fällt das Wasser unter 32 Schuh etwann bis in F herab, und zwar um so weiter, als mehr Luft in der Röhre war.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 387. Da man überhaupt die Röhre und das Gefäß als gemeinschaftliche Röhren ansehen kan, und die Luft sowohl auf die Röhre als auf das Gefäß drückt, so mus auch das Wasser im ersten Falle aus der Röhre ganz herab fallen, bis es mit dem Wasser im Gefäße gleiche Höhe erhält, damit das Gleichgewicht erfolge. §. 331 u. 332.

Da aber im andern Falle die Luft nur auf die Wasserfläche des Gefäßes nicht aber auf die Wasserfläche in der Röhre drucken kan, so widerstehet die Luftsaule des Dunstkreises mit ihrem Gewichte dem

Ge.

Gewichte der Wassersäule in der Röhre, und hält ihr das Gleichgewicht.

Ist aber wie im dritten Falle über dem Wasser der Röhre etwas Luft enthalten, so sucht sich derselbe bei dem Fallen des Wassers auszudehnen, und diese Ausdehnungskraft widersteht dem Drucke der Luftsäule des Dunstkreises, daß dieselbe das Wasser in der Röhre nicht mehr auf der vorigen Höhe von 32 Schuhen, sondern nur in einer minderen F erhalten kan.

Z u s a z.

§. 388. Daraus erhellet also, daß eine Wassersäule von beinahe 32 Schuhhöhe einer Luftsäule von gleicher Grundfläche, welche aber die Höhe des ganzen Dunstkreises zu ihrer Höhe hat, das Gleichgewicht zu halten vermag.

Daß die Höhe der Wassersäule, welche einer Luftsäule des Dunstkreises von gleicher Grundfläche das Gleichgewicht halten kan, nur bei nahe von 32 Schuhen angegeben werden kan, ist die Ursache, weil weder das Wasser noch die Luft allezeit eine gleiche Schwere haben.

Z u s a z.

§. 389. So wie man eine Röhre, welche an einem Ende ganz geschlossen ist, wie im zweiten Falle, mit einer leichtern oder schwerern flüssigen Materie, füllet, so wird auch die Höhe, in welcher sie von der Luftsäule des Dunstkreises im Gleichgewicht erhalten wird, grösser oder kleiner sein, und zwar werden diese Höhen in umgekehrter Verhältnis, der eigenthümlichen Schwere dieser flüssigen Materien stehen.

Auf

Aufgabe.

§. 390. Wie die Schwere einer Luftsaule des Dunstkreises zu finden, wenn ihre Grundfläche gegeben ist? ●

Auflösung: 1. Multipliciret die gegebene Grundfläche der Luftsaule durch die Höhe einer Wassersaule, so ihr das Gleichgewicht hält, oder durch 32 Schuhe; so wird das Produkt der körperliche Inhalt einer Wassersaule sein, welche mit der Luftsaule gleiche Schwere hat.

2. Setzet: wie 1 Kubitschuh Wasser zum körperlichen Inhalt der gleich berechneten Saule von eben dieser Materie; so verhält sich die Schwere eines Kubitschuh Wassers zur Schwere der ganzen Wassersaule.

Da nun diese Wassersaule mit der Luftsaule gleiche Schwere hat, so wird dadurch auch die Schwere der Luftsaule des Dunstkreises bekannt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 391. Wenn zwei Luftsaulen gleiche Höhen, aber verschiedene Grundflächen haben, so verhalten sich ihre körperliche Inhalte, und folglich auch ihre Schwestern gegen einander wie ihre Grundflächen §. 283. Geom. und da ihr Druck ihrer Schwere gleich ist, so werden auch zwei Flächen, die den Grundflächen der Luftsaulen gleich sind, durch zwei gleichhohe Luftsaulen nach dem Verhältnis ihrer Grundflächen gedrückt.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 392. Da die Luft mit ihrer Schwere wie alle übrige schwere Körper nach einer geraden, und auf dem Horizont senkrecht stehenden Linie drückt, so hat man

man die Grundfläche einer Luftsaule allezeit als eine gerade horizontal liegende Fläche zu betrachten, die von eben solcher Grösse ist, daß sie von der Luftsaule vollkommen gedeckt werde, was auch die Fläche, worauf der Druck wirklich geschieht, immer für eine aus- oder eingebogene Gestalt haben mag. Wenn man demnach die Grundfläche einer Luftsaule, welche auf eine Kugel drückt, in Betrachtung ziehen wil, so hat man nicht die halbe Oberfläche der Kugel, sondern die Fläche ihres größten Querschnitts zu nehmen. Eben so würde man bei einem gerade stehenden Regel, gegen dessen Spitze eine Luftsaule von gleichen Durchmesser der Grundfläche des Regels in der Richtung seiner Achse drückt, die Grundfläche der Luftsaule nicht nach der Oberfläche sondern nach der Grundfläche des Regels zu schätzen haben.

Aufgabe.

§. 393. Wie die eigenthümliche Schwere eines gewissen Volumens z. B. eines kubischen Schuh Luft zu finden?

Auflösung: 1. Nehmet eine grosse gläserne Kugel, welche eine Oefnung hat, die sich durch eine angebrachte Pipette sperren und öffnen läßt; wäget sie auf einer sehr genauen Wage, indem sie mit Luft angefüllt ist, die der äussern an Dichtigkeit vollkommen gleich ist, und merket das Gewicht davon.

2. Zieheth die Luft mit Hülfe einer guten Luftpumpe so rein aus, als immer möglich ist, damit ihr den geringen etwas noch zurückbleibenden Teil der Luft als nichts ansehen könnet.

3. Wä.

3. Wäget nun die luftleere Kugel abermal, und ziehet das gefundene Gewicht von dem vorigen ab, so wird der Unterschied die Schwere des in der Kugel enthalten gewesten Lufts sein.

4. Suchet den körperlichen Inhalt der Kugel entweder nach geometrischen Regeln, oder, wenn sie nicht ganz regelmäßig wäre, wie meistens geschieht, füllet sie mit Wasser, und wäget sie abermal; ziehet das Gewicht der Kugel, welches oben gefunden worden, davon ab, so habt ihr das Gewicht des Wassers.

5. Da wir das Gewicht eines kubischen Schuh Wassers schon bekant zu sein annehmen, so setzet: wie die Schwere eines Kubischschuh Wassers zur Schwere des Wassers in der Kugel; eben so verhält sich 1 Kubischschuh zum körperlichen Inhalt der Kugel.

6. Setzet endlich: wie der körperliche Inhalt der Kugel zu einem Kubischschuh; eben so verhält sich die gefundene Schwere der in der Kugel enthalten gewesten Luft zu der Schwere eines Kubischschuh Luft.

Da man durch die vorhergehenden zwei Aufgaben sowohl die Schwere einer Luftsäule des Dunstkreises von einer gegebenen Grundfläche, als auch die Schwere eines gewissen Volumens z. B. eines kubischen Schubes Luft findet, so scheint es, daß man eben dadurch auch die Höhe des Dunstkreises bestimmen können sollte. Allein da die Luft in verschiedenen Höhen nicht von gleicher Dichtigkeit ist, S. 376. und man bisher noch durch kein Mittel erfahren konnte, in welchen Verhältnis dieselbe abnimmt, so ist es auch nicht möglich, die eigentliche Höhe des Dunstkreises sicher zu bestimmen.

Er.

Erklärung.

§. 394. Wenn man eine über 28 Zoll lange glä. Fig. 137.
ferne Röhre AB an einem Ende A zuschmelzet, durch
das andere offene B über sie ganz vol mit Quecksil-
ber füllet, und dasselbe, ohne daß zuvor et-
was heraus laufe, unter die Oberfläche des in einen
Gefäß D bereit stehenden Quecksilbers steckt, und ver-
tikal aufstellet, so wird diese Röhre nach ihrem Erfin-
der die toricellische Röhre, oder auch Barometer ge-
nent.

Z u s a z.

§. 395. Weil das Wasser in einer oben vollkom-
men geschlossenen Röhre von der Luftsaule des Dunst-
kreises beinahe auf einer Höhe von 32 Schuhen erhal-
ten wird, §. 386. das Quecksilber aber 14mal schwe-
rer als das Wasser ist, und die Höhen, auf welchen
sich die flüssigen Materien von verschiedener Schwere
das Gleichgewicht halten, in umgekehrter Verhältnis
dieser Schwere stehen, §. 389. so mus die Höhe,
in welcher die Quecksilbersaule von der Luftsaule in der
toricellischen Röhre erhalten wird, auch 14mal kleiner
als die der Wassersaule, und folglich nur bei 28 Zoll
sein.

Z u s a z.

§. 396. So wie das Wasser aus der Röhre herab-
fällt, wenn sie oben nicht geschlossen ist, oder nicht in
der Höhe von 32 Schuhen stehen bleibt, wenn der
obere Raum in derselben nicht vollkommen luftleer ist,
§. 386. so geschihet es auch in der toricellischen Röhre
aus der nehmlichen Ursach mit dem Quecksilber.

Erfahrung

§. 397. Die Höhe der Quecksilbersäule in einer toricellischen Röhre ist in einem nehmlichen Orte sehr oft der Veränderung unterworfen.

Z u s a z.

§. 398. Da die Quecksilbersäule in der toricellischen Röhre ihre Höhe ändert, so muß sich auch ihre Schwere ändern, und weil sie doch allezeit der Luftsäule des Dunstkreises das Gleichgewicht hält, so folgt nothwendig, daß auch die Schwere oder der Druck des Dunstkreises sich so oft verändern müsse, als die Höhe des Quecksilbers sich in der toricellischen Röhre ändert. Daher kan diese Röhre oder das Barometer überhaupt gebraucht werden, die Veränderungen der Schwere des Dunstkreises oder seines Drucks wahrzunehmen.

Durch viele Erfahrungen weis man, daß die Veränderungen, welche an der Höhe des Barometers gewöhnlicher weise vorgehen, in den kalten Erdstrichen am größten, in dem gemäßigten fast niemals über zwei Zolle betragen, in den heißen Erdstrich aber, oder unter dem Aequator selbst am kleinsten sind.

Um einen Barometer nach der aller gemeinsten und einfachesten Art zu verfertigen hat man hauptsächlich folgendes in acht zu nehmen:

I. Erwählet man ein gerades gläsernes Rohr von beiläufig 34 bis 36 Zolle in der Länge, und höchstens von 2 oder 3 Linien im innern Durchmesser. Man hat bei dieser Auswahl insbesondere darauf zu sehen, daß das Glas rein, und
wenig

wenigsten in der Gegend, wo das Quecksilber mit seiner Oberfläche die Veränderungen des Dunstkreises anzeigen wird, genau von gleicher Weite seie.

2. Nachdem die Röhre von aller Unreinigkeit und Feuchte innerlich gesäubert worden, wird das obere Ende derselben zugeschmolzen; und mittelst eines Trichters ganz vol mit wohl gereinigten und etwas warm gemachten Quecksilber angefüllt. Man hat dabei acht zu geben, daß, wenn Luftblasen sich zwischen dem Quecksilber in der Röhre verschlagen, solche entweder durch rütteln, oder durch anhalten einer brennenden Kohle nach und nach zusammengesammelt, und endlich oben durch die Oefnung ausgetrieben werden, bis das Quecksilber durchaus ganz dicht in der Röhre erscheint.

3. Erwählet man ein beliebiges gläsernes oder Porzellanenes Gefäß, dessen Durchmesser zum wenigsten 10 bis 14male größer als der innere Durchmesser der Röhre ist, und füllet es 8 bis 10 Linien hoch mit Quecksilber. Dieses Gefäß wird aber von darum soweit angenommen, damit die Veränderung der Quecksilberhöhe bei dem steigen und fallen des Quecksilbers in der Röhre in demselben noch nicht merklich wird.

4. Drückt man auf das offene Ende der gefüllten Röhre einen Finger fest an, fehret das zugeschmolzene Ende in die Höhe, fahret mit dem andern samt dem Finger unter die Oberfläche des in dem Gefäß befindlichen Quecksilbers, und ziehet den Finger von der Oefnung hinweg, so fället das Quecksilber in der Röhre alsbald soweit herab,

ab, als es vermöge dem damaligen Druck des Dampfkreises hin, und oberher, entstehet ein luftleerer Raum.

5. Befestiget man die vertikal stehende Röhre an dem neben dem Gefäß aufwärts gehenden Brettlein oder hölzernen Stütze nach Belieben, und decket das Gefäß mit einem Deckel leicht zu, damit kein Staub oder Unreinigkeit hinein kan.

6. Zeichnet man eine Skale auf Papier etwa von 3 Zoll lang, theilet sie in Bainen ein, und befestiget sie oben gegen dem Ende der Quecksilbersaule dergestalt an das Brettlein, daß der mittlere Theilungspunkt eben so hoch über die Fläche des in dem Gefäßes befindlichen Quecksilbers, als die mittlere Höhe, auf welche das Quecksilber in diesem Orte, wo der Barometer gemacht wird, gewöhnlicher Weise zu steigen pfleget, welches blos durch längere Erfahrung bestimmt werden kan. In Wien ist diese mittlere Höhe des Quecksilbers nach den von dem gelehrten Hr. Abt Riesganig gemachten langen Erfahrungen 28 Zoll 3 Linien Wiener Maas.

Wir übergahen andere Barometerarten, welche noch mehr zusammengesetzt sind, obwohl sie ebenfalls ihre Verdienste haben.

Obwohl die Barometer eigentlich nichts anders als die Veränderungen des Drucks und der Schwere des Dampfkreises anzeigen, so werden sie dennoch sehr oft und fast gemeiniglich zur Vorhersagung des Wetters, wiewohl nicht allezeit mit der erwünschten Gewisheit gebraucht; weil die Veränderung desselben wirklich grossen Theils von der

mch.

mehr oder weniger Schwere der Last abhänget. In dieser Absicht wird auch die abgemessene Skale zur Anzeige des verschiedenen Wetters darnach eingerichtet, wie man insgemein an Barometern sehen kan. Nur kommt es in solchen Falle hauptsächlich darauf an, daß der Punkt der Skale, welcher der mittlere ist, und das veränderliche Wetter anzeigen hat, in der rechten Höhe über die Fläche des Quecksilbers in dem Gefäße angehäftet werde; als welche mit der Nr. 6. gemeldeten mittlern Höhe einerlet ist.

Er f a h r u n g.

§. 399. Wenn man die Höhe des Quecksilbers im Barometer in zween Orten, welche in verschiedener Höhe über die Seefläche liegen, beobachtet, so findet man, daß sie in dem höhern niedriger, und in dem tiefern höher sei.

Die Ursach dessen ist, weil die Luftsaule des Dunstkreises, welche auf die untere Oefnung der Röhre, oder auf das Quecksilber in dem Gefäße drückt, in höhern Orten kürzer, und in tiefern länger wird, und folglich im ersten Falle leichter, im andern aber schwerer ist, so kan sie auch das Quecksilber in höhern Orten nicht so hoch als in tiefern drücken.

Z u s a z.

§. 400. Wenn man demnach wüßte, um wie viel das Quecksilber in Orten von verschiedener Höhe steigen oder fallen müsse, so gäbe dieses ein sehr bequemes Mittel an die Hand, wenigstens etwas beträchtlichere Höhenunterschiede zweier Oerter zu messen; welches

durch den Weg der Geometrie in vielen Fällen oft sehr meistläufig und mühsam ist.

Man hat sich schon viele Mühe gegeben, eine gewisse Regel zu entdecken, nach welcher man die Höhenunterschiede zweier Dörter aus den in demselben zu gleicher Zeit beobachteten Barometerhöhen finden könnte; aber unter allen Entdeckungen, so hierüber an Tage gekommen, ist meines Wissens noch keine gefunden worden, welche in allen Fällen ein vollkommenes Genügen geleistet hätte, wenn nach denselben Erfahrungen angestellt worden. Eilige treffen zwar bei grössern Höhen ziemlich nahe ein, bei Kleinern aber zeigen sich öfters sehr starke Abweichungen. Und bei andern ereignet sich gerade da, wo man am wenigsten erwarten würde, aber dennoch etwas zu beobachten, in kurzen, in seinen Umständen angegeben, sie in gegenwärtigen, übergehen, weil sie abhängen. Die eigentliche Versuchsanstalt bestehet aber in folgenden:

Fig. 138.

1. Wenn AB der Höhenunterschied zweier Dörter A und B zu suchen, und AC die Höhe eines dritten beliebigen Orts C über A entweder schon bekannt wäre, oder leicht geometrisch gemessen werden könnte, so beobachtet soviel möglich zu gleicher Zeit die Barometerhöhen sowohl in A als C und B; und misst auch die Höhe AC, im Fall sie noch unbekant ist.

2. Zie-

2. Ziehet den Logarithmus der Barometerhöhe in B von dem Logarithmus der Barometerhöhe in A ab, welche ihr in Linien oder noch kleinern Theilen beobachtet habt, und setzet diesen Unterschied als eine Naturalzahl an, die wir hier mit D ausdrücken wollen.

3. Ziehet auch den Logarithmus der Barometerhöhe in C von dem Logarithmus der Barometerhöhe in A ab, und setzet diesen Unterschied ebenfalls als eine Naturalzahl an; welche wir mit d benennen.

4. Suchet sowohl zu D als d die Logarithmen durch Handrechnung, wenn sie auch in ihren letzten Zahlen nicht vollkommen richtig sind.

5. Addiret den Logarithmus von D und den von der $\frac{1}{2}$ B. in Klaftern oder Schuhen betanten oder gemessenen Höhe AC zusammen, und ziehet von der Summe den Logarithmus von d ab, so ist der Ueberrest der Logarithmus von der gesuchten Höhe AB; dessen Naturalzahl in den Tafeln die Anzahlklafter oder Schuhe von AB angezeigt.

Beispiel

Es seie die Barometerhöhe in A = 330 Linien,

... .. $\log A = 2,5185139$

... .. $\log B = 2,4771213$

die gemessene Höhe AC = 127 Klafter.

so ist $\log A = 2,5185139$

$\log B = 2,4771213$

... .. $\log D = 2,4139261$

... .. $\log d = 2,4139261$

$$\text{Log. A} = 29185139$$

$$\text{Log. C} = 29148738$$

$$\text{---} \\ \text{Log. d} = 26491$$

$$\text{Log. D} = 56168954$$

$$\text{Log. d} = 44216039$$

$$\text{ferner Log. D} = 56168954$$

$$\text{Log. AC} = 2,1038037$$

$$\text{---} \\ 7,7206991$$

$$\text{Log. d} = 4,4216039$$

$$\text{Log. AB} = 3,2990952 = 1991 \text{ Kl.}$$

Erfahrung.

Fig. 139. §. 401. Wenn man eine gläserne hohle Kugel A, welche mit einer langen abt. engen Röhre AB versehen ist, mit einer flüssigen Materie z. B. mit Weingeist, oder Quecksilber füllt, daß dieselbe noch einen Teil als etwann bis in C in die Röhre reicht; hierauf aus dem übrigen Theil der Röhre AB die flüssige Materie in der Röhre weicher über C die Kugel umgiebt, oder fällt wird, und das Ende der Röhre AB geschlossen wird, so die Kugel zusammen, äußere Luft kälter geschicket nach dem Verhältnis wird.

Z u s a z.

§. 402. Da die Röhre vollkommen geschlossen ist, und also kein Druck der Luft auf die flüssige Materie, welche in der Kugel enthalten ist, eine Wirkung haben kann, so muß ihre Ausdehnung und Zusammenziehung,

hung, oder das Steigen und Fallen, derselben in der Röhre bloß von der mehr und, wenigern Wärme der äußern Luft, als welche endlich auch die eingeschlossene flüssige Materie erwärmet, herrühren; und da das Steigen und Fallen nach Verhältnis der mehr oder wenigern Wärme der äußern Luft geschieht, so giebt dieses Gelegenheit die Unterschiede der Wärme der Luft oder anderer flüssiger Materien wahrzunehmen.

— Erklärung.

§. 403. Ein Instrument, mit welchem man die Wärme oder Kälte der Luft oder anderer flüssigen Materien beobachten kan, wird ein Thermometer genannt.

Bei Verfertigung eines Thermometers hat man hauptsächlich folgendes in acht zu nehmen:

1. Ermählet ein vollkommen gleichweites gläsernes Rohr, mit einer Kugel, die nicht viel über, und auch nicht viel unter einen halben Zoll im Durchmesser hat. Man erkennet aber, ob das Rohr gleichweit ist, wenn man nur soviel Quecksilber hinein läßt, daß es einen Cylinder von ungefähr einen halben Zoll in der Länge machet, hierauf denselben langsam durch die Röhre gehen laßet, und zusiehet, ob derselbe in allen Stellen des Rohrs eine gleiche Länge behält; welches alsdenn ein Zeichen ist, daß das Rohr an keinen Orte weiter oder enger sei.

2. Obwohl man sich zur Füllung eines Thermometers einer beliebigen flüssigen Materie bedienen könnte, so ziehet man doch das Quecksilber wegen seiner Beständigkeit, und gleichförmigen

und weil es fast in der größten Be-
 feine Gültigkeit behält, gemeinlich
 vor. Daher hält man sehr wohl ge-
 schaltet in Bereitschaft, erwärmet
 es vor Röhre, damit die darin be-
 ausgetrieben werde; steht hierauf
 Röhre in das Quecksilber, bis die
 Luft ein Teil der Röhre selbst damit
 angefüllt ist.

3. Stellet nun die Kugel in eine sehr kalte
 Materie, z. B. in gefallenen Schnee oder Eis,
 um nach einer kleinen Weile zu sehen, wie weit
 das Quecksilber in der Röhre stiege; denn wenn
 dasselbe gänzlich in die Kugel zurück gieng, so
 wäre es ein Zeichen, daß noch zu wenig in der
 Röhre wäre, und müßte in solchem Falle noch et-
 was mehr Quecksilber nachgefüllt werden, bis
 daß auch bei der größten Kälte noch etwas davon
 im Rohr zurück bleibt.

4. Nächst, bis bei dem Füllen sich in die Kugel
 eingeschlagene Luftblasen oder durch sanftes sto-
 ßen und rühren, oder durch die Wärme herauszu-
 treiben, bis das Quecksilber ganz dicht er-
 scheint.

5. Leihet auch die Luft durch die Röhre aus
 dem leeren Teil der Röhre, und schmelzet sie dare-
 auf oben zu.

6. Stellet alldenn die Kugel in zerstoßenes
 Eis, welches eben zu fließen anfangen will, beob-
 achte nach einer kleinen Weile die Höhe des
 Quecksilbers in der Röhre, und bemerke diesen
 Punkt mit einem um dieselbe gebundenen Seiden-
 faden.

haben, oder Pferdhoatz D; so wird dieser Punkt Fig. 139. den Eis oder Gefrierpunkt, andeuten; erwärmet hierauf die Kugel wieder nach und nach, und setzet sie in ein Wasser, welches eben zu kochen anfängt; bemerket, abermal nach einer kleinen Weile die Höhe des Quecksilbers in der Röhre, mit einem ungebundnen Faden R, so hat man auch den Punkt für die Hitze des siedenden Wassers bestimmt.

7. Nehmet den Abstand des Eispunkts von dem des siedenden Wasserhitz mit einem Zirkel, und traget ihn auf eine an einem eigens zubereiten Bretlein gezogene gerade Linie; theilet ihn in 80 gleiche Theile; spritzet eine ordentliche Stale daraus, welche man auch noch unter den Gefrierpunkt verlängert; und setzet zu dem Gefrierpunkt 0, auf und abwärts demselben aber zu den übrigen Theilungspunkten, die natürlichen Zahlen. Befestiget endlich die Röhre dergestalt an diesem Bretlein, daß beide mit den Fäden bemerkte Hauptpunkten mit eben demselben auf der Stale übereinkommen, so hat man einen nach Raumursart eingetheilten Thermometer, welcher am meisten üblich ist.

Will man noch die Grade der Hitze und Kälte von andern Sachen z. B. von siedenden Oehl, von der Hitze des Bluts in einem tödtlichen Fieber, oder eines gesunden Menschen, temperirte Zimmerhitze, die größte Kälte von einem gewissen Tage und Orte, u. m. d. gl. darauf anmerken, so kan man sie entweder durch eigene Erfahrungen bestimmen, oder von andern Thermometerbeobachtungen nehmen.

eines, andern, von andern der Art vergleichen. Kurz es lassen sich damit, ohne die vorgehende Veränderung der Feuchte und Trockne der Luft, aber nicht ihre eigentliche Größe wahrnehmen.

Drittes Hauptstück.

Von der Bewegung der Luft, und von dem Widerstand, den sie gegen andere in ihr bewegte Körper ausübet.

Erklärung.

§. 407. Wenn die Luft aus was immer für einer Ursache an einem Orte dünner oder dichter als in einem andern benachbarten wirts, und dadurch gezwungen ist, so lang von einem Orte nach dem Andern zu strömen, bis sie sich wieder in das Gleichgewicht gesetzt, oder gleiche Dichtigkeit erhalten hat, so wird die daher entstandene Bewegung derselben der Wind genent.

§. 408. Was also immer die Luft auszudehnen oder zusammenzudrücken vermag, kan auch als eine Ursache des Windes angesehen werden; und weil die zusammengebrückte oder ausgedehnte Luft wegen ihrer natürlichen Federkraft, um so mehr widerstehet, als sie mehr zusammengebrückt oder ausgedehnt ist, so mus auch die dadurch entstehende Bewegung, durch welche sie sich wieder in das Gleichgewicht zu setzen trachtet, um so geschwinder, und folglich der Wind um so heftiger

tiger sein, als die Luft an einem Orte dichter oder dünner als an einem andern benachbarten ist.

Lehrsatz

§. 400. Die Luft widerstehet einem jeden in ihre bewegten Körper nach dem Verhältnis ihrer Dichtigkeit.

Beweis: Da die Luft ein Körper ist, so hat ein jedes Teilchen so klein es auch sein mag, eine Kraft der Trägheit, vermög welcher es sich in dem Stande zu erhalten sucht, in dem es wirklich ist; folglich widerstehet ein jedes Luftteilchen der Bewegung eines Körpers, der es aus seiner Stelle zu brücken sucht, gleich viel; je dichter aber die Luft ist, je mehrere solche Teilchen enthält sie auch in einem nehmlichen Raume, folglich um so mehrere muss der bewegte Körper aus ihrer Stelle brücken, also da sich die Anzahl der Luftteilchen wie die Dichtigkeiten der Luft verhalten, so verhält sich auch der Widerstand der Luft wie ihre Dichtigkeit.

Zusatz

§. 410. Ein in der Luft bewegter Körper muss also immer an seiner Geschwindigkeit etwas verlieren, weil ihm die Luft so lang er sich bewegt, immer widerstehet; und dieser Verlust ist um so grösser als die Luft dichter ist.

Zusatz

§. 411. Es mag sich ein Körper gegen die Luft, oder diese gegen einen bewegen, so ist doch der Widerstand gleich gross, wenn nur die Geschwindigkeit in beiden Fällen gleich ist, und die Luft gleiche Dichtigkeit hat.

Lehr

§. 412. Die Luft widersteht einem in ihr bewegten Körper nach dem Verhältnis der Oberfläche, gegen welche sie perpendicular anstößt.

Beweis: Je grösser die Oberfläche des bewegten Körpers gegen welche die Luft perpendicular anstößt, ist, um so mehr Lufttheilchen mus auch der Körper in gleichen Zeiten aus ihrer Stelle treiben; da aber die Grösse des Widerstandes von der Menge dieser Theilchen abhängt, so mus sich derselbe wie die Oberfläche gegen welche die Luft perpendicular anstößt, verhalten.

§. 413. Ein Körper, der sich mit einer grössern Fläche als ein anderer gerade gegen die Luft oder mit mehrer Geschwindigkeit bewegt, mus daher mehr von seiner Geschwindigkeit verlieren als iener.

§. 414. Obwohl die Luft den bewegten Körpern nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen widersteht, und also von zweien bewegten Kugeln von ungleichen Durchmessern, und gleicher Geschwindigkeit die grössere einen grössern Widerstand in Ansehung der kleinern leidet, so wird doch die Kraft der Bewegung der kleinern durch den Widerstand der Luft eher als in der grössern vernichtet, weil die Bewegungskraft der Körper aus dem Produkte der Massen in die Geschwindigkeit bestehet, und dieselbe in der grössern Kugel um soviel grösser ist, als sie mehr Masse hat als die kleinere; hingegen der Widerstand der Luft nur nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen, oder nach den Quadraten ihrer Durchmesser zu rechnen ist, die gegen einander ein kleineres Verhältnis haben. Daraus ist also zu ersehen, daß die Wirkungen selbst des Widerstandes nicht soviel

aus

aus seiner Grösse allein, als aus dem Verhältnis desselben, oder der Oberfläche zum Gewicht oder der Masse der Kugel zu beurtheilen sei. . . Wenn man sich dennach zwei Kugeln von gleicher Materie vorstellt, wovon aber der Durchmesser der einen doppelt so gross als der andern ist, so wird das Gewicht der grössern zu dem der kleinern wie $8 : 1$, hingegen ihre Oberflächen nur wie $4 : 1$ sein. Obwohl nun der Widerstand der grössern viermal grösser ist als der kleinern, so wird doch die Wirkung des Widerstandes der ersten zu der der andern Kugel nur wie $\frac{8}{4} : \frac{1}{1}$ oder $2 : 1$ sein, wenn man nemlich annimmt, daß ihre Geschwindigkeiten anfänglich gleich sind. Ja es kan sogar geschehen, daß eine grössere Kugel anfänglich eine kleinere Geschwindigkeit als eine andere die kleiner ist, hat, und dennoch ihre Bewegungskraft später als jene verlieret, und also weiter gehet. Ueberhaupt kan man aus allen diesen abnehmen, daß, wenn zwei Kugeln von gleicher Materie aber ungleichen Durchmessern durch proportionirte Kräften bewegt werden, auch auf eine gleiche Weite gehen würden, wenn kein Widerstand der Luft vorhanden wäre; und das die grössere wirklich nur um soviel weiter als die kleinere gehet, als die Wirkung des Widerstandes bei der ersten geringer als bei der andern ist. Das ist also die wahre Ursache, warum eine Kanone von grössern Kaliber weiter als eine von kleinern schießet, wenn beide ähnlich sind, und mit gleich proportionirter Pulverladung zu ihrer Kugelschwere geladen werden.

Lehrsatz.

§. 415. Die Widerstände, welche geben gleiche mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegte Körper in gleich dichter Luft zu leiden haben, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Beweis. Betrachtet, daß mit je größerer Geschwindigkeit, ein Körper bewegt wird, je mehr ihm auch die Luft widersteht, §. 413. und um so mehrere Lufttheilchen hat, er auch in der nämlichen Zeit zu überwinden. Wenn daher der Widerstand der Lufttheilchen gegen einen Körper, der nur eine einfache Geschwindigkeit hat, $= 1$ ist, so ist derselbe gegen einen Körper der z. B. eine dreifache Geschwindigkeit hat $= 3$; da nun der andere wegen seiner größern Geschwindigkeit auch 3mal mehrere solche Lufttheilchen in der nämlichen Zeit zu überwinden hat, so ist der Widerstand den er leidet, noch 3mal größer, und also $= 9$; und folglich ist der Widerstand beider Körper wie 1:9, oder wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 416. Wenn also zween Körper von ungleicher Oberfläche und mit verschiedener Geschwindigkeit in der Luft von verschiedener Dichtigkeit bewegt werden, so sind die Widerstände, die sie von der Luft zu leiden haben, in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Oberflächen, der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten, und der Dichtigkeiten der Luft. D. i. wenn S und s ihre Oberflächen, V und v , die Geschwindigkeiten, D und d die Dichtigkeiten der Luft, und R und r die Widerstände ausdrücken, so ist

$$R : r = SV^2D : sv^2d.$$

Doch sind viele Gelehrte der Meinung, daß dieses Gesetz nur so lang richtig sei, als die Geschwindigkeit des bewegten Körpers so groß ist, daß der hinter demselben entstehende leere Raum durch die eindringende Luft gleich wieder erfüllet werden könne, sobald aber die Geschwindigkeit größer ist, als daß die Luft geschwind genug folgen

gen kan, welches nach Hr. Eulers Meinung für eine Sekunde 1348 rheinländische Schuh beträgt, so solle auch der Widerstand der Luft noch in einem weit größern Verhältniß als die Quadrate der Geschwindigkeiten anwachsen, weil der bewegte Körper in einem solchen Falle nicht allein die Kraft der Trägheit der Luft, sondern auch zugleich den Druck, der vor dem Körper befindlichen Luftsäule, welchen sie gegen den hinten her entstehenden leeren Raum ausübet, zu überwinden hat.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

S. 417. Da also die Luft einen Widerstand in ihrer Bewegung gegen Körper leistet, so muß eine jede gleichförmige Bewegung in eine abnehmende verwandelt werden; da aber ein jeder horizontal geschossener oder geworfener Körper, wenn er durch seinen Flug eine Parabel beschreiben sol, eine gleichförmige, und eine beschleunigte Bewegung haben muß, S. 77 u. 84. so kan die Fluglinie eines in der Luft geschossenen oder geworfenen Körpers niemals eine wahre Parabel sein, sondern derselbe muß eine andere Gattung einer krummen Linie beschreiben, die von der Parabel um so mehr abweicht, als der Widerstand der Luft, oder die Geschwindigkeit des Körpers größer ist, wodurch also alle Wurf oder Schußweiten kürzer ausfallen müssen.

Es würde nicht sehr schwer sein die krumme Linie so durch einen in der Luft geschossenen oder geworfenen Körper beschrieben wird, zu bestimmen, wenn man die Größe des Widerstandes der Luft und die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers in allen Fällen richtig voraus bestimmen könnte. Aus den angeführten Sätzen lassen sich zwar

Unterb. Mechanik. III. Th. 2 die

den Verhältnisse des Widerstandes angeben, aber noch nicht die wirkliche Größe desselben herleiten. Die Schwierigkeiten dabei kommen theils von dem Mangel einer nähern Kenntnis der Eigenschaften der Luft, theils auch von den beständigen Veränderungen derselben her. Die grösste Gelehrte sind hierüber in ihren Meinungen noch verschieden. Bezout in seinen mathematischen Kurs ist mit andern der Meinung, daß der Widerstand, den ein bewegter Körper in einer nicht elastischen flüssigen Materie z. B. im Wasser zu leiden hat, dem Gewichte eines Prismas dieser Materie gleich sei, welches die stossende Fläche des Körpers zur Grundfläche, die doppelte Höhe aber, über welche ein Körper fallen müste, um eine gleiche Geschwindigkeit, mit der er gegenwärtig bewegt wird, zu erhalten, zur Höhe hat. Bei einer elastischen flüssigen Materie aber, wie nemlich die Luft ist, sol ein doppeltes Gewicht eines eben solchen Prismas dem Widerstand gleich sein; oder welches einerlei ist, man sol die stossende Fläche des Körpers mit der vierfachen Höhe, von der ein Körper fallen müste um die Geschwindigkeit des bewegten zu erlangen, multiplizieren, und ihr Gewicht für den Widerstand nehmen. Euler hingegen sagt in seinen Erläuterungen der neuen Grundsätzen der Artillerie von Robins pag. 470. Daß man im Stande sei, die meisten über den Widerstand sowohl der Luft als des Wassers angestellte Experimente zu erklären, wenn man annimt, daß der Widerstand eines nach seiner Länge bewegten Cylinders gleich sei dem Gewichte eines gleich dicken aus eben der flüssigen Materie bestehenden Cylinder, dessen Höhe derie-

nigen.

nigen gleich ist, wodurch die Geschwindigkeit des bewegten Cylinders ausgedrückt wird. Er erinnert aber auch zugleich in der folgenden Anmerkung, daß dieses nur von demjenigen Theil des Widerstandes zu verstehen sei, welcher aus dem wirklichen Anstöße des Körpers an die Theilchen der flüssigen Materie entspringet; und nur bei langsamen Bewegungen stat hat; daß aber der Widerstand noch um vieles vergrößert werde, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers größer ist, als daß die Luft von hinter dem Körper entstehenden leeren Raum also gleich wieder ausfüllen kan. Da nun die Luft in einen leeren Raum mit einer Geschwindigkeit von 29100 rheinländischen Schuhen eindringet, welche auf 1. Sekunde 1348 Schuh beträgt, so könnte diese Regel nur stat finden, so lang die Geschwindigkeit des bewegten Körpers in 1 Sekunde noch unter 1348 Schuh wäre; sobald aber die Geschwindigkeit noch größer ist, so würde man die besagte Höhe der Luftsaule, deren Gewicht den Widerstand ausdrückt, noch um 29100 rheinländische Schuhe größer annehmen müssen, man im solchem Falle den gesamten Widerstand zu erhalten. Es ist also leicht zu erachten; daß man auch diese Höhe noch vergrößern müssen würde; wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers noch größer wäre, und folglich der Druck der Luft von vorne her noch vermehret würde.

Aus allen diesen erhellet, wie verschieden die Meinungen von der Bestimmung der eigentlichen Größe des Widerstandes der Luft sind; wenn man aber aufmessen überläßt, welchen Veränderungen die Luft unterworfen ist, so wird man

Wärtungen des Pulvers fen-
 er es ist, die anfängliche Ge-
 geschossenen, oder geworfenen
 können, so wird man sich auch
 a, wie vielen Schwierigkeiten
 Größe des Widerstands der
 e. Indessen müssen wir uns
 mit der Hoffnung befriedigen, daß man durch den
 Fleiß geschickter Männer, und mehrere über dies
 sen Gegenstand eigens angestellte Versuche mit der
 Zeit wenigstens der Wahrheit näher kommen werde.

Fünfter Abschnitt.

Von der Bewegung der flüssigen Ma-
 terien, hauptsächlich aber des Wassers.

Erstes Hauptstück.

Von der Bewegung der flüssigen Materien
 durch ihre eigene Schwere.

Lehrsatz.

418.

Wenn man mit einer flüssigen Materie z. B. mit
 Wasser angefüllte Gefäße gleiche Höhen und un-
 ten gleiche Oefnungen haben, und starr vol erhalten
 werden, so fließet aus beiden in gleichen Zeiten eine
 gleiche Menge Wassers.

Des

Von der Bewegung der flüssigen Materien. 342

Beweis: Da verm
gleiche Höhen, und L
die Wassersäulen, wel
einander gleich, und so
die unterste Wasserfläch
also mus auch in gleiche
Menge Wasser ausfließen.

Lehrsatz.

§. 419. Die Mengen des durch zwei gleiche Defnungen zweier ungleichhohen Gefäßen in gleicher Zeit ausfließenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten. Fig. 140.

Beweis: Es sey in den zwei Gefäßen A und B der Flächeninhalt ihrer Defnungen nach der Voraussetzung $= L = l$, und H und h die Höhen der in gleicher Zeit ausgeflossenen Wassersäulen. So sind HL und hl die Mengen des aus jedem Gefäß ausgeflossenen Wassers, da nun $L = l$ ist, und man H und h als die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers ansehen kan, so ist $HL : hl = H : h$, §. 283. Geomet. d. i. die Mengen des durch zwei gleiche Defnungen in gleicher Zeit ausfließenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.

Lehrsatz.

§. 420. Wenn zwei allezeit gleich volle Gefäße gleiche Defnungen aber ungleiche Höhen haben, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des in gleichen Zeiten aus demselben fließenden Wassers wie die Quadratrathen der Höhen der Gefäße.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn L und l die Defnungen, OD und EF die Höhen der beiden Gefäßen,

§. 412. **Z u s a z.**

Die Luft widersteht einem in ihr bewegten Körper nach dem Verhältnis der Oberfläche, gegen welche sie perpendicular anstößt.

Beweis. Je größer die Oberfläche des bewegten Körpers, gegen welche die Luft perpendicular anstößt, ist, um so mehrere Lufttheilchen mus auch der Körper in gleichen Zeiten aus ihrer Stelle treiben; da aber die Größe des Widerstandes von der Menge dieser Theilchen abhänget, so mus sich derselbe wie die Oberfläche gegen welche die Luft perpendicular anstößt, verhalten.

z. B.

Der sich mit einer größern Geschwindigkeit gegen die Luft oder mit einer andern bewegt, mus daher mehr von der Luft widerstanden werden als jener.

Z u s a z.

§. 414. Obwohl die Luft den bewegten Körpern nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen widersteht, und also von zweien bewegten Kugeln von ungleichen Durchmessern, und gleicher Geschwindigkeit die größere einen größern Widerstand in Rücksicht der kleinern leidet, so wird doch die Kraft der Bewegung der kleinern durch den Widerstand der Luft eher als in der größern vernichtet, weil die Bewegungskraft der Körper aus dem Produkte der Massen in die Geschwindigkeit bestehet, und dieselbe in der größern Kugel um soviel größer ist, als sie mehr Masse hat als die kleinere; hingegen der Widerstand der Luft nur nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen, oder nach den Quadraten ihrer Durchmesser zu rechnen ist, die gegen einander ein kleineres Verhältnis haben. Daraus ist also zu sehen, daß die Wirkungen selbst des Widerstandes nicht soviel aus

aus seiner Größe allein, als aus dem Verhältnis desselben, oder der Oberfläche zum Gewicht oder der Masse der Kugel zu beurteilen sei. Wenn man sich denach zwei Kugeln von gleicher Materie vorstellt, wovon aber der Durchmesser der einen doppelt so groß als der andern ist, so wird das Gewicht der größern zu dem der kleinern wie 8 : 1, hingegen ihre Oberflächen nur wie 4 : 1 sein. Obwohl nun der Widerstand der größern viermal größer ist als der kleinern, so wird doch die Wirkung des Widerstandes der letztern zu der der andern Kugel nur wie $\frac{4}{8}$: $\frac{1}{1}$ oder $\frac{1}{2}$: 1 sein; wenn man nemlich annimmt, daß ihre Geschwindigkeiten anfänglich gleich sind. Ja es kan sogar geschehen, daß eine größere Kugel anfänglich eine kleinere Geschwindigkeit als eine andere die kleiner ist, hat, und dennoch ihre Bewegungskraft später als jene verlieret, und also weiter gehet. Überhaupt kan man aus allen diesen abnehmen, daß, wenn zwei Kugeln von gleicher Materie aber ungleichen Durchmessern durch proportionirte Kräften bewegt werden, auch auf eine gleiche Weite gehen würden, wenn kein Widerstand der Luft vorhanden wäre; und das die größers wirklich nur um soviel weiter als die kleinere gehet, als die Wirkung des Widerstandes bei der erstern geringer als bei der andern ist. Das ist also die wahre Ursache, warum eine Kanone von größern Kaliber weiter als eine von kleinern schießet, wenn beide ähnlich sind, und mit gleich proportionirter Pulverladung zu ihrer Kugelschwere geladen werden.

Lehrsatz.

§. 415. Die Widerstände, welche geben gleiche mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegte Körper in gleich dichter Luft zu leiden haben, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Beweis. Betrachtet, daß mit je größerer Geschwindigkeit, ein Körper bewegt wird, je mehr ihm auch die Luft widersteht, §. 413. und um so mehrere Lufttheilchen hat er auch in der uehnlichen Zeit zu überwinden. Wenn daher der Widerstand der Lufttheilchen gegen einen Körper, der nur eine einfache Geschwindigkeit hat, $= 1$ ist, so ist derselbe gegen einen Körper der z. B. eine dreifache Geschwindigkeit hat $= 3$; da nun der andere wegen seiner grössern Geschwindigkeit auch 3mal mehrere solche Lufttheilchen in der nehmlichen Zeit zu überwinden hat, so ist der Widerstand den er leidet, noch 3mal grösser, und also $= 9$; und folglich ist der Widerstand beider Körper wie 1:9, oder wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Z u s a z.

§. 416. Wenn also zween Körper von ungleicher Oberfläche und mit verschiedener Geschwindigkeit in der Luft von verschiedener Dichtigkeit bewegt werden, so sind die Widerstände, die sie von der Luft zu leiden haben, in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Oberflächen, der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten, und der Dichtigkeiten der Luft. D. i. wenn S und s ihre Oberflächen, V und v , die Geschwindigkeiten, D und d die Dichtigkeiten der Luft, und R und r die Widerstände ausdrücken, so ist

$$R : r = SV^2D : sv^2d.$$

Noch sind viele Gelehrte der Meinung, daß dieses Gesetz nur so lang richtig sei, als die Geschwindigkeit des bewegten Körpers so gros ist, daß der hinter demselben entstehende leere Raum durch die einbringende Luft gleich wieder erfüllet werden könne, sobald aber die Geschwindigkeit grösser ist, als daß die Luft geschwind genug folgen

gen

gen kan, welches nach Hr. Eulers Meinung für eine Sekunde 1348 rheinländische Schuh beträgt, so solle auch der Widerstand der Luft noch in einem weit größern Verhältnis als die Quadrate der Geschwindigkeiten anwachsen, weil der bewegte Körper in einem solchen Falle nicht allein die Kraft der Trägheit der Luft, sondern auch zugleich den Druck, der vor dem Körper befindlichen Luftsäule, welchen sie gegen den hinten her entstehenden leeren Raum ausübet, zu überwinden hat.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 417. Da also die Luft einen Widerstand in ihr bewegten Körper stets widersteht, so muß eine jede gleichförmige Bewegung in eine abnehmende verwandelt werden; da aber ein jeder horizontal geschossener oder geworfener Körper, wenn er durch seinen Flug eine Parabol beschreiben sol, eine gleichförmige, und eine beschleunigte Bewegung haben muß, §. 77 u. 84. so kan die Fluglinie eines in der Luft geschossenen oder geworfenen Körpers niemals eine wahre Parabol sein, sondern derselbe muß eine andere Gattung einer krummen Linie beschreiben, die von der Parabol um so mehr abweicht, als der Widerstand der Luft, oder die Geschwindigkeit des Körpers größer ist, wodurch also alle Wurf oder Schußweiten kürzer ausfallen müssen.

Es würde nicht sehr schwer sein die krumme Linie so durch einen in der Luft geschossenen oder geworfenen Körper beschrieben wird, zu bestimmen, wenn man die Größe des Widerstandes der Luft und die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers in allen Fällen richtig voraus bestimmen könnte. Aus den angeführten Fällen lassen sich zwar

Unterh. Mechanik. III. Th. 2 die

die Verhältnisse des Widerstandes angeben, aber
 noch nicht die würlliche GröÙe desselben herleiten.
 Die Schwierigkeiten dabei kommen theils von dem
 Mangel einer nähern Kenntniss der Eigenschaften
 der Luft, theils auch von den beständigen Verän-
 derungen derselben her. Die gröÙte Gelehrte sind
 hierüber in ihren Meinungen noch verschieden.
 Bezout in seinen mathematischen Kurs ist mit an-
 dern der Meinung, daß der Widerstand, den ein
 bewegter Körper in einer nicht elastischen flüssigen
 Materie z. B. im Wasser zu leiden hat, dem Ge-
 wichte eines Prisma dieser Materie gleich sei,
 welches die stoßende Fläche des Körpers zur
 Grundfläche, die doppelte Höhe aber, über welche
 ein Körper fallen müÙte, um eine gleiche Ge-
 schwindigkeit, mit der er gegenwärtig bewegt wird,
 zu erhalten, zur Höhe hat. Bei einer elastischen
 flüssigen Materie aber, wie nemlich die Luft ist,
 sol ein doppeltes Gewicht eines eben solchen Pris-
 ma dem Widerstand gleich sein; oder welches ei-
 nerlei ist, man sol die stoßende Fläche des Kör-
 pers mit der vierfachen Höhe, von der ein Körper
 fallen müÙte um die Geschwindigkeit des bewegten
 zu erlangen, multiplizieren, und ihr Gewicht für
 den Widerstand nehmen. Euler hingegen sagt in
 seinen Erhäuterungen der neuen Grundsätzen der
 Artillerie von Robins pag. 470. Daß man im
 Stande sei, die meisten über den Widerstand
 sowohl der Luft als des Wassers angestellte
 Experimente zu erklären, wenn man annimt,
 daß der Widerstand eines nach seiner Länge
 bewegten Cylinders gleich sei dem Gewichte
 eines gleich dicken aus eben der flüssigen Ma-
 terie bestehenden Cylinder, dessen Höhe derie-
 nigen.

nigen gleich ist, wodurch die Geschwindigkeit des bewegten Cylinders ausgedrückt wird. Er erinnert aber auch zugleich in der folgenden Anmerkung, daß dieses nur von demjenigen Theil des Widerstandes zu verstehen sei, welcher aus dem wirklichen Anstöße des Körpers an die Theilchen der flüssigen Materie entspringet; und nur bei langsamen Bewegungen stat hat; daß aber der Widerstand noch um vieles vergrößert werde, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers größer ist, als daß die Luft von hinter dem Körper entstehenden leeren Raum also gleich wieder ausfüllen kan. Da nun die Luft in einen leeren Raum mit einer Geschwindigkeit von 29100 rheinländischen Schuhen eindringet, welches auf 1 Sekunde 1348 Schuh beträgt, so könnte diese Regel nur stat finden, so lang die Geschwindigkeit des bewegten Körpers in 1 Sekunde noch unter 1348 Schuh wäre; sobald aber die Geschwindigkeit noch größer ist, so würde man die besagte Höhe der Luftsaule, deren Gewicht den Widerstand ausdrückt, noch um 29100 rheinländische Schuhe größer annehmen müssen, um in solchem Falle den gesamten Widerstand zu erhalten. Es ist also leicht zu erachten, daß man auch diese Höhe noch vergrößern müssen würde; wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers noch größer wäre, und folglich der Druck der Luft von vorn her noch vermehret würde.

Aus allen diesen erhellet, wie verschieden die Meinungen von der Bestimmung der eigentlichen Größe des Widerstandes der Luft sind; wenn man aber aufmerksamer überlies, welchen Veränderungen die Luft unterworfen ist, so wird man

Gleich geschickter Männer, und mehrere über diesen Gegenstand eigens angestellte Versuche mit der Zeit wenigstens der Wahrheit näher kommen werde.

Fünfter Abschnitt.

Von der Bewegung der flüssigen Materien, hauptsächlich aber des Wassers.

Erstes Hauptstück.

Von der Bewegung der flüssigen Materien durch ihre eigene Schwere.

Lehrsatz.

§. 418.

Wenn zwei mit einer flüssigen Materie z. B. mit Wasser angefüllte Gefäße gleiche Höhen und unten gleiche Oefnungen haben, und stads voll erhalten werden, so fließet aus beiden in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wassers.

Beo

Von der Bewegung der flüssigen Materien. 347

Beweis: Da vermög Voraussetzung beide Gefäße gleiche Höhen, und Oefnungen h die Wassersäulen, welche auf die einander gleich, und wenden ein g die unterste Wasserfläche durch die g also mus auch in gleicher Zeit durch Menge Wasser ausfließen.

Lehrsatz.

§. 419. Die Mengen des durch zwei gleiche Oefnungen zweier ungleichhohen Gefäßen in gleicher Zeit ausfließenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten. Fig. 140.

Beweis: ~~Da~~ ~~ist~~ ~~in~~ ~~den~~ ~~zwei~~ ~~Gefäßen~~ ~~A~~ ~~und~~ ~~B~~ der Flächeninhalt ihrer Oefnungen nach der Voraussetzung $= L = l$, und H und h die Höhen der in gleicher Zeit ausgestossenen Wassersäulen, so sind HL und hl die Mengen des aus ieder Gefäß ausgestossenen Wassers, da nun $L = l$ ist, und man H und h als die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers ansehen kan, so ist $HL : hl = H : h$, §. 283. Geomet. d. i. die Mengen des durch zwei gleiche Oefnungen in gleicher Zeit ausfließenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.

Lehrsatz.

§. 420. Wenn zwei allezeit gleich volle Gefäße gleiche Oefnungen aber ungleiche Höhen haben, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des in gleicher Zeiten aus demselben fließenden Wassers wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäßen.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn L und l die Oefnungen, OD und EF die Höhen der beiden Gefäßen,

Nun, und E und c die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers sind, der Druck, welcher durch die über die Oefnungen stehenden Wassersäulen geschieht, wie $L \times OD : 1 \times EF$, und weil $L = 1$ angenommen ist, wie $OD : EF$ sei, §. 283. Geom.; nicht minder, daß die aus beiden Gefäßen in gleicher Zeit ausfließende Mengen Wassers wie $L \times C : 1 \times c$, und folglich die Bewegungsträften dieser Mengen wie die Produkte aus den Mengen in ihre Geschwindigkeiten d. i. wie $L \times C \times c : 1 \times c \times c$ oder wie $LC^2 : 1c^2$ sei. Nun aber kan man diese Bewegungsträften als die Wirkungen des Druckes der in den Gefäßen enthaltenen Wassersäulen ansehen, und die Wirkungen sind ihren Ursachen gleich, also ist $LC^2 : 1c^2 = OD : EF$, und weil $L = 1$, so ist: $C^2 : c^2 = OD : EF$, folglich $C : c = \sqrt{OD} : \sqrt{EF}$. D. i. die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäßen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 421. Da sich die Mengen des durch zwei gleiche Oefnungen in gleicher Zeit ausfließenden Wassers wie ihre Geschwindigkeiten verhalten §. 419., und diese wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäßen sind, §. 420., so verhalten sich auch die durch zwei gleiche Oefnungen in gleicher Zeit ausfließende Mengen wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäße.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 422. Wären die Oefnungen zweier Gefäßen ungleich, die Höhen derselben aber gleich, und folglich auch die Geschwindigkeiten, so würden sich die in gleichen Zeiten ausfließende Mengen Wassers wie die Flächeninhalte der Oefnungen verhalten. Ferner da die

Flä.

Flächeninhalte zweier Zirkel wie die Quadrate ihrer Durchmesser sind §. 223. Geomet. so werden auch die durch zirkelförmige Oefnungen in gleicher Zeit ausfließende Mengen Wassers sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

Z u f a ß.

§. 423. Sind sowohl die Oefnungen als Höhen zweier Gefäßen ungleich, so stehen die in gleicher Zeit durch dieselben ausfließende Mengen Wassers in einer zusammengesetzten Verhältnis aus den Verhältnissen der Flächeninhalte ihrer Oefnungen, und Quadratwurzeln ihrer Höhen, d. i. nach der vorigen Benennung $LC : lc = L \times \sqrt{OD} : l \times \sqrt{EF}$.

Z u f a ß.

§. 424. Wenn man auch annimmt, daß sowohl die Oefnungen L und l als die Höhen OD und EF ungleich sind, so ist dennoch $LC^2 : lc^2 = L \times OD : l \times EF$ §. 420., und folglich auch $C^2 : c^2 = OD : EF$, und $C : c = \sqrt{OD} : \sqrt{EF}$. D. i. wenn auch die Oefnungen ungleich sind, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers dennoch wie die Quadratwurzeln der Höhen des Wassers über die Oefnungen; folglich wird das Wasser aus zweien Gefäßen von gleicher Höhe allezeit mit gleicher Geschwindigkeit ausfließen, wenn auch die Oefnungen ungleich sind.

Z u f a ß.

§. 425. Da die eben an der Oefnung befindliche Wasserfläche von einer Wasserfülle gedrückt wird, welche die Höhe des Gefäßes zu ihrer Höhe hat, so wird die Geschwindigkeit des Wassers bei der Oefnung so

groß sein, als ob es von der Oberfläche des in dem
Gefäße enthaltenen Wassers bei der Defnung frei ge-
fallen wäre.

inden

gleich

mit

be-

dreis

Fig. 141.

Das was hier von dem Ausflusse des Wassers
durch Defnungen in der Grundfläche des Gefäßes
ermiesen worden, läßt sich auch von Defnungen
erweisen, welche an der Seite wie A, oder schief
wie B, oder gerade wie C angebracht sind; nur
wird das Wasser bei B und C wegen dem Wi-
derstande, welchen die Schwere der bereits heraus-
gedrungenen Wassertheile gegen die noch zurück-
befindlichen ausübt, etwas langsamer als in an-
dern Fällen ausfließen.

Die Seiten, in welchen zwei prismatische

S. 497. Die Seiten, in welchen zwei prismatische
Gefäße von gleichen Höhen und Defnungen sich aus-
leeren, verhalten sich wie die Grundflächen dieser Ge-
fäße.

Der aus beiden Gefäßen wegen ihren glei-
chen Höhen und Defnungen in gleicher Zeit eine gleiche
Menge Wasser ausfließt. Es mus das größe-
re Gefäß A mehr und so längere Zeit als das kleinere
B zum Ausfließen brauchen, als der Kubinhalt des
ersten größer als der des andern ist; die Zeiten ver-
halten

halten sich also wie die Kubikinhalte; diese aber sind wegen den gleichen Höhen wie die Grundflächen S. 423. Geomet. also verhalten sich auch die Zeiten der Ausleerung wie die Grundflächen der Gefäße.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

S. 428. Da durch eine größere Oefnung eine größere Menge Wasser ausfließet, als in der heymlichen Zeit durch eine kleinere, folglich bei der größern Oefnung eine um so kürzere Zeit zur Ausleerung nöthig ist, so müssen die Zeiten der Ausleerung zweier Gefäßen von gleicher Höhe aber von ungleichen Oefnungen in einer zusammengesetzten Verhältniß und zwar aus der geraden der Grundflächen der Gefäßen, und umgekehrten ihrer Oefnungen stehen.

L e h r s a t z.

S. 429. Die Zeiten, in welchen zwei prismatische Gefäße von gleichen Grundflächen und Oefnungen aber von ungleichen Höhen ausfließen, verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus diesen Höhen.

Beweis: Man setze, es sey die Höhe $OD : EF$ Fig. 140. $= 4 : 1$, so sind die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers wie die Quadratwurzeln der Höhen S. 420., folglich wie $2 : 1$. Ferner betrachte man, daß aus einem Gefäße in einer doppelten Zeit mit doppelter Geschwindigkeit viermal soviel Wasser ausfließen müsse, als aus einem andern von gleicher Oefnung in einer einfachen Zeit mit einfacher Geschwindigkeit. Da nun in diesen Gefäßen in dem ersten die Menge Wasser vierfach, und die Geschwindigkeit doppelt so groß ist, als in dem andern, so mus auch die Zeit, welche zur Ausleerung des ersten nöthig ist, doppelt so groß als bei dem andern sein, und sich

also ebenfalls wie 2:1 d. i. wie die Geschwindigkeiten und folglich wie die Quadratwurzeln der Höhen verhalten.

ausfließenden Gefäßen so

e. Höhen und Defnungen
1, in welchen sie sich aus-
setzten Verhältnis aus den
rundflächen, geraden der
n, und umgekehrten ihrer

Defnungen.

welche in gleichen
die Defnung eines
hen in einer abneh-
Zahlen 7. 5. 3. 1.

Fig. 142. Beweis: Bildet sich ein, als ob die Höhe des Gefäßes AE in lauter kleine aber gleiche Teile eingeteilt, und in den Stellen B, C, D, E, welche soviel dieser Teile, als die Quadrate der natürlichen Zahlen Einheiten, bald 1, 4, 9, 16 enthalten, durch Flächen durchschnitten wären; so werden die Geschwindigkeiten, da sie wie die Quadratwurzeln der Höhen sind, sein 1, 2, 3, 4, wenn das Wasser nach und nach von E bis D, C, B, abfließt, nämlich erstlich in E wie $\sqrt{AE} = \sqrt{16} = 4$, in D wie $\sqrt{AD} = \sqrt{9} = 3$, in C wie $\sqrt{AC} = \sqrt{4} = 2$, und in B wie $\sqrt{AB} = \sqrt{1} = 1$, sein d. i. wie die natürlichen Zahlen in umgekehrter Ordnung abnehmen; da sich nun die Zeiten des Ausflusses ebenfalls wie die Quadratwurzeln aus diesen Höhen verhalten §. 429., so wird das Wasser in der ersten Zeit von E bis D, in

in der zwoten von D bis C, in der dritten von C bis B, und in der vierten von B bis A ausfließen. Die Mengen des in diesen gleichen und aufeinander folgenden Zeiten ausfließenden Wassers aber verhalten sich wegen ihren gleichen Grundflächen wie ihre Höhen ED, DC, CB, BA, oder vielmehr wie die Unterschiede $AE - AD = 16 - 9 = 7$; $AD - AC = 9 - 4 = 5$, $AC - AB = 4 - 1 = 3$; $AB - 0 = 1 - 0 = 1$. D. i. wie 7. 5. 3. 1, oder sie sind in einer wie die natürlichen Zahlen in umgekehrter Ordnung abnehmenden Progression.

Z u s a z.

§. 432. Wenn zween Körper anfänglich mit gleicher Geschwindigkeit bewegt werden, und die Bewegung des einen allezeit gleichförmig, die des andern aber wie die ungerade Zahlen 7, 5, 3, 1 abnimmt, so wird der erste einen doppelt so grossen Raum als der andere in gleicher Zeit durchlaufen §. 44.; da man nun die aus zweien Gefäßen in gleichen Zeiten ausfließende Mengen Wassers als die durchlaufenen Räume ansehen kan, so wird aus einem Gefäß, welches stäts vol erhalten wird, und also die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers stäts gleich verbleibet, eine doppelte Menge Wasser in eben der Zeit ausfließen, als sich ein anderes, das keinen Zufluß hat, und folglich die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers stäts abnimmt, übrigens aber von gleicher Höhe, Grundfläche und Oefnung ist, ausleeret.

Z u s a z.

§. 433. Weis man demnach in wie viel Zeit ein Gefäß sich durch eine Oefnung ausleeret, so kan man auch die Menge des Wassers berechnen, welches in
einer

einer jeden andern Zeit aus diesem Gefäße fließet. 3. Da es später entstand, so hoch potsmatisches Gefäß sich in 12 Stunden ganz leert, und man müßte aus dem vorigen, daß die Mengen des enthaltenen Wassers, wie die Höhen, einander als wie die Quadrate ihrer Höhen verhalten, so theilt die Höhe des Gefäßes in $12 \times 12 = 144$ gleiche Theile ein, wovon ihr diejenige, welche von unten aufwärts auf die ungerade Zahlen treffen, besonders bemerkt, und denselben Grund ebenfalls 144 ausmachet. Da nun das Wasser in gleichen Zeiträumen den umgekehrten Zahlen in umgekehrter Ordnung abfließt, so wird in der ersten Stunde $\frac{1}{144}$, in der zweiten $\frac{2}{144}$, in der dritten $\frac{3}{144}$, in der vierten $\frac{4}{144}$, u. s. w. und in der zwölften Stunde $\frac{12}{144}$ des ganzen in dem Gefäße enthaltenen Wasser ausfließen.

Dies ist der Grund, worauf die Einrichtung der vor ältern gewöhnlichen sogenannten Wasseruhren (Chapshydra) beruhet, oder eingerichtet waren.

Ubrigens lehret die Erfahrung, daß die Geschwindigkeiten und auch die Mengen des ausfließenden Wassers in der Folge allzeit etwas minder angetroffen werden, als sie vermög den

ie Ursach da-
des Wassers
dem Rande
ig der Waf-
as Ende des
s Gefäßes in
hlich ist, in
er eine Höhe
il die Waf-

verteilt werden wegen ihren Zusammenhang nicht so geschwind folgen können. Endlich sind auch die Gesetze

sey nur in so lang reichlich, als die Oeffnung nach beträchtlich kleiner als der Boden des Gefäßes ist; denn wenn dieselbe ebenso groß als der Boden wäre; so würde die ganze in denselben enthaltene Menge Wasser nach und nach, sondern auf einmal auslaufen, wie die Masse eines festen Körpers mit einander fällt.

Erklärung.

§. 434. Wenn das Wasser in einer langen oberher ganz offenen Höhlung oder Rinne dahin läuft, so wird solche nach Umständen der Kanal, der Rinnthal, oder das Flussbett genant; wird es aber in geschlossenen Röhren fortgeführt, so heist man dieses eine Wasserleitung.

Lehrsatz.

§. 435. Wenn das Wasser in geschlossenen Röhren, oder in offenen Rinnen von einem Orte nach einem andern bloß durch seine Schwere fließen sol, so mus der Ort, wo es herfließet, höher, oder weiter vom Mittelpunkt der Erde liegen, als der Ort wo es hinfließet.

Beweis
 seine Schu-
 hern, und
 nichts verhi-
 nicht näher
 oder des R.
 das Wasser
 durch seine
 her oder wo
 als der and....

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 436. Wenn demnach eine gerade Röhre oder ein Kanal mit einem Ende höher als mit dem andern liegt, und das Wasser durch denselben fließet, so läßt sich dabei dasienige auf eine ähnliche Weise anwenden, was §. 246. von der Bewegung der Körper über schiefe Flächen angeführet worden.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 437. Damit das Wasser durch eine Röhre oder Kanal durch seine eigene Schwere fließe, ist eben nicht unumgänglich erforderlich, daß sie durchaus gerade, und in allen Stellen auf eine gleichförmige Art abhängig sei, sondern sie kan auf verschiedene Weise rechts oder links, oder auf und abwärts gebogen sein, wie Fig. 143. ABCDE, genug wenn nur kein Ort höher als der Anfang A ist; denn gelange die Röhre etwann bis in F, und FG wäre grösser als AI, so würde das Wasser nur bis L oder soweit kommen, bis $LM = AI$ wäre, §. 331. und wenn es weiter sollte, von L nach F steigen müssen, welches wider die Natur der Schwere ist.

Wenn demnach eine Wasserleitung durch Röhren oder ein Kanal zu machen ist, so hat man vor allem den Weg, den man damit nehmen will, durchzusehen, zu erforschen, ob kein zwischen dem Ende höher, als der Anfangsort sei; und dabei ist noch zu tragen, daß man die Leitung so gerade mache, als die Umstände erlauben, erstlich weil die gerade Linie die kürzeste ist, und also die Leitung oder der Kanal eine mindere Länge haben darf; zweiten, weil das Wasser sich in den Krümmungen mehr reibet, und dadurch an

sei

seiner Geschwindigkeit verliert, und dritten weil die Teile der Röhren welche wie BC zwar niedriger als A, aber dennoch aufwärts steigen, einen grössern Druck von Wasser auszuüben haben als die andern, folglich der Gefahr zu bersten mehr ausgesetzt werden.

Erklärung.

§. 438. Wenn ein Kanal, oder der Kinnal eines Flusses durchaus gerade fortgeht, und eine prismatische Gestalt hat, so ist er regelmässig; im Gegesatz aber unregelmässig.

Der Hagenschein lehrt, daß die natürlichen Kinnäle der Flüsse sehr unregelmässig sind, und daß man nur wenige antrifft, welche durch die Kunst mehr oder weniger regelmässig gemacht sind; da aber die Unregelmässigkeit derselben die Bewegung des Wassers so vielfältig verändern kan, daß sie sich nicht füglich in gewisse Geseze bringen lasset, so sind auch die meisten Geseze, welche hier in der Folge von dem Laufe des Wassers in Flüssen und Kanälen angeführet werden, größtentheils auch nur auf regelmässige Kanäle anwendbar.

Erklärung.

§. 439. Man pflegt benennig einen beständigen Fluß zu nennen, dessen Wasser stets gleich fortläuft, und in einen nehmlichen Orte allezeit in gleicher Höhe bleibt, so wie der ein unbeständiger Fluß heist, bei welchem sich zu Zeiten das Gegenteil ereignet.

Z u s a z.

§. 440. So lang also der Zufluß von Wasser gleich ist, oder dasselbe auf keine Art vermehrt oder vermindert

mindert wird, so lang ist auch der Fluß beständig; sein Ninnfal mag übrigens regelmässig oder unregelmässig sein.

Die Erfahrung zeigt, daß die natürlichen Flüsse, da ihr Zufluß durch Regen und Schnee oft vermehrt, und durch die Ausdünstung und Versiegung vermindert wird, wenigstens nicht lange beständig sein können.

Erklärung.

§. 441. Wenn der Ninnfal eines Flusses oder Kanals durch eine Fläche perpendicular auf die Grundfläche, und auf die Richtungslinie der Bewegung des Wassers durchschnitten wird, so wird der Teil der Fläche, welcher das Wasser durchschneidet, die Durchschnitfläche des Flusses genannt.

Lehrsatz.

§. 442. Durch jeden Durchschnit eines regelmässigen oder unregelmässigen aber beständigen Flusses oder Canal laufet in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser.

Beweis: Da bei regelmässigen Ninnfälen alle Durchschnitte gleich sind, so ist für sich klar, daß durch dieselbe in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser durchlaufe, nimt man aber an, daß zweien Durchschnitte eines unregelmässigen Ninnfals von ungleicher Grösse sind, so würde das Wasser zwischen denselben niedriger werden müssen, wenn durch den obern kleinern in der nehmlichen Zeit nicht eben soviel Wasser durchlaufen könnte, als durch den untern grössern; und umgekehrt wenn der obere grösser wäre, und mehr Wasser durch ihn als durch den untern kleinern in der nehmlichen Zeit-

lau-

laufen könnte, so würde dasselbe zwischen ihnen höher werden müssen. Geschähe aber dieses, so wäre der Fluß nicht mehr beständig; also mus durch jeden Durchschnit eines beständigen Flusses in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser durchlaufen.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 443. Damit also in einem Fluß durch einen kleinern Durchschnit eine eben so grosse Menge Wasser als durch einen grössern in der nemlichen Zeit durchfließen könne, so mus dasselbe in dem kleinern eine grössere Geschwindigkeit als in dem grössern erhalten.

L e h r s a t z.

§. 444. Die unteren Teile des Wassers in einem Durchschnitte eines Flusses würden allezeit mehrer Geschwindigkeit als die oberen haben, wenn keine Reibung vorgienge.

Beweis: Bildet sich ein, daß der Quersal eines Flusses mit einer Fläche ABD, senkrecht hergestellt durchschnitten wäre, daß der Lauf des Wassers durch diese Fläche ganz gehemmet würde, und das durch dieselbe in verschiedenen Höhen F, G, I kleine Oefnungen gemacht würden; so sind die Geschwindigkeiten des durch dieselben ausfließenden Wassers wie die Quadratwurzeln der Höhen CF, CG, CI des darüber stehenden Wassers §. 420.; nimt man nun die Fläche ganz hinweg, damit das Wasser seinen freien Lauf bekomme, so behalten die Teilchen desselben noch eben die Geschwindigkeiten, mit welchen sie zuvor durch die Oefnungen herausdrangen, und folglich sind die unteren Teile des Wassers in einem Durchschnitte geschwinder als die oberen, wenn keine Reibung vorgienge.

Die Erfahrung zeigt sehr oft, daß das untere Wasser langsamer, oder wenigstens nur eben so geschwind als das obere dahin fließe; die Ursache dessen aber ist, weil sich dasselbe an den öfters sehr beträchtlichen Ungleichheiten des Grundes sehr stark reibet, und daher an seiner Geschwindigkeit verliert.

Erklärung.

§. 445. Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem Durchschnit wird diejenige genent, welche eben so groß ist, daß, wenn alle Teile des Wassers dieselbe hätten, eine gleiche Menge in der nehmlichen Zeit durchfließen müßte, als durchfließet, da die Wasserteilchen verschiedene Geschwindigkeiten haben.

Aus den verschiedenen Geschwindigkeiten des Wassers in einem Durchschnit eine mittlere zu finden, hat man verschiedene Arten erdacht. Eine derselben gründet sich hauptsächlich auf die Eigenschaft der Parabol; weil nemlich die Quadrate der halben Ordinaten derselben wie die ihnen zukommenden Abscissen sind, und die Quadrate der Geschwindigkeiten des in verschiedenen Höhen fließenden Wassers sich zu diesen Höhen eben so verhalten, so kan man die Quadrate der Geschwindigkeiten als die halben Ordinaten, und die Höhen wie die Abscissen einer Parabol ansehen, und also zwischen zwei gegebenen halben Ordinaten, nebst ihren Abscissen eine mittlere halbe Ordinate als die mittlere Geschwindigkeit finden. Man kan von dieser Art in Hr. Wolfs Elementis Mathematicis universæ; in der *Mechanique general* par Dedier, und in mehrern andern nachlesen; wir übergehen sie aber kurze halber, und geben dafür

dafür folgende, welche sich auf die Erfahrung gründet, und durch ein von Hr. Pitot eigens dazu erfundenen Instrument bewerkstelliget wird, dessen Beschaffenheit folgende ist: daß Instrument, womit man die Geschwindigkeit des fließenden Wassers in verschiedenen Tiefen messet, um daraus die mittlere Geschwindigkeit zu finden, bestehet aus zween geraden gläsernen Röhren AB und CD, die an ihren Enden offen sind, CD. aber unten rechtwinkelt umgebogen ist, und die Gestalt eines Trichters hat. Beide müssen in ihrem innern Durchmesser wenigsten 4 Linien weit, und etwas länger als die größte Tiefe des Wassers sein, wenn sie daher sehr lang gemacht müsten werden, folglich der Gebrechlichkeit zu sehr unterworfen wären, so machet man die Teile, so unter das Wasser getaucht werden, von Messingblech, und füttet die gläserne Röhren oben darauf. Um beide zugleich in einerlei Tiefe senkrecht in das Wasser stellen zu können, so werden beide Röhren solchergestalt an ein langes Stückholz fest gemacht, daß die Oefnungen B und D in gleicher Höhe neben einander zu stehen kommen. Über dieses kan die Röhre AB von B gegen A in Zolle und Linien eingetheilet werden.

Fig. 145.

Aufgabe.

§. 446. Wie die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des durch einen Durchschnit eines Flusses fließenden Wassers in verschiedenen Tiefen mittelst dem beschriebenen Instrument zu untersuchen, und daraus sowohl die mittlere Geschwindigkeit als auch die Tiefe, in welcher sie sich befindet, zu bestimmen?

Auflösung: 1. Stellet das beschriebene Instrument an dem Orte, wo ihr den Durchschnit annehmet, auf verschiedene Tiefen, und dergestalt senkrecht in das Wasser, daß die Oefnung des Trichters D gerade gegen dem Stromme gekehret wird; so wird das Wasser in der Röhre AB nur bis an die Oberfläche IE des Flusses, hingegen in CD wegen der Kraft, mit welcher das Wasser gegen dem Trichter stösset, um so höher über IE gegen F steigen, als das Wasser in der Tiefe in welcher der Trichter befindlich, mehr Geschwindigkeit hat als in einer andern.

2. Bemerket an der Einteilung der geraden Röhre AB bei jedesmaliger Eintauchung die Tiefe derselben, und an der Röhre CD die Höhe, auf welche das Wasser über die Oberfläche des Flusses steigt; so geben diese Höhen die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des Wassers in den bemerkten Tiefen.

3. Da ieder schwerer Körper, folglich auch das Wasser in der ersten Sekunde 15 Schuh tief fället, S. 48., und mit der durch diesen Fal erlangten Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung in der nachmlichen Zeit sich noch einmal soweit folglich 30 Schuh bewegen würde, S. 44., nebst deme die Geschwindigkeiten des fallenden Wassers sich wie die Quadratwurzeln der Höhen, oder die Quadrate der Geschwindigkeiten sich wie die Höhen des Falles selbst verhalten S. 420., so läßt sich, wenn man die Tiefen IB der jedesmaligen Eintauchung mit t' , t'' , t''' , t'''' ; die dabei beobachtete Wasserhöhen EF mit h' , h'' , h''' , h'''' ; die Geschwindigkeiten des Wassers mit x' , x'' , x''' , x'''' benennet, die Geschwindigkeit des Wassers für jede Tiefe finden, wenn man sezet:

fer sich an den meistens sehr rauhen und unebenen Ufern sehr stark reibe, und mit demselben überhaupt mehr als die Wasserteilchen unter sich selbst zusammenhänge. Daher findet man die Geschwindigkeit des fließenden Wassers in einem Durchschnitt in gleichen Tiefen oft sehr verschieden, und es kommt auch hier oftmals darauf an, die Beobachtungen an verschiedenen Stellen zu machen, und daraus alsdenn das Mittel zu nehmen.

Z u s a z.

§. 447. Wenn man also die Weite, auf welche das Wasser mit der mittlern Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit z. B. in einer Sekunde fließet, bekannt hat, so erhält man die Menge Wasser, welche durch den angenommenen Durchschnitt in eben der Zeit durchfließet, wenn man den Flächeninhalt des Durchschnitts mit dieser Weite multipliciret.

Z u s a z.

§. 448. Wenn demnach die Flächeninhalte der Durchschnitte zweener Flüsse einander gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers ebenfalls gleich sind, so fließet in gleichen Zeiten durch dieselben eine gleiche Menge Wasser.

Sind aber die Flächeninhalte der Durchschnitte ungleich, und die mittleren Geschwindigkeiten gleich, so verhalten sich die in gleichen Zeiten durchfließenden Mengen Wassers wie die Flächeninhalte.

Wären die Flächeninhalte der Durchschnitte gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten ungleich, so sind die in gleichen Zeiten durchfließenden Mengen Wasser wie die mittlern Geschwindigkeiten.

Wenn

Wenn endlich beide ungleich sind, so stehen die in gleichen Zeiten durchfließenden Mengen Wasser in einer zusammengesetzten Verhältnis der Durchschnittsflächen, und mittlern Geschwindigkeiten.

Z u s a z.

§. 449. Da durch einen jeden Durchschnit eines regelmässigen oder unregelmässigen aber beständigen Flusses in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser fließet, §. 442., wenn auch die Durchschnitte ungleich sind; so stehen die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers in zween solchen Durchschnitten in verkehrter Verhältnis der Flächeninhalte derselben.

Lehrsatz.

§. 450. Das Wasser fließet in einem durchaus regelmässigen Rinnsal, dessen Grundfläche wie eine schiefe liegende gerade Fläche abhanget, mit vermehrter Geschwindigkeit.

Beweis: Da das Wasser ein schwerer Körper ist, und diese, wenn sie über eine schiefe Fläche laufen, ihre Geschwindigkeit vermehren, §. 60. so mus dieses auch beim Wasser geschehen, welches über die schiefliegende Grundfläche seines Rinnsals dahin fließet.

Z u s a z.

§. 451. Weil also die Teilchen des in einem abhangenden Rinnsal fließenden Wassers um so geschwin-
der übereinander hinweg fließen, als sie sich schon weiter von dem Anfangsorte A ihres Laufes entfernt haben, so mus die Wassertiefe AB beim Anfang am größten sein; aber immer abnehmen, wie FG, und DE, wie sich das Wasser von A mehr entfernt; so das die

Fig. 146.

Die Erfahrung zeigt sehr oft, daß das untere Wasser langsamer, oder wenigstens nur eben so geschwind als das obere dahin fließe, die Ursach dessen aber ist, weil sich dasselbe an den öfters sehr beträchtlichen Ungleichheiten des Grundes sehr stark reibet, und daher an seiner Geschwindigkeit verliert.

Erklärung.

§. 445. Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem Durchschnit wird diejenige genent, welche eben so groß ist, daß, wenn alle Teile des Wassers dieselbe hätten, eine gleiche Menge in der nehmlichen Zeit durchfließen müste, als durchfließet, da die Wasserteilchen verschiedene Geschwindigkeiten haben.

Aus den verschiedenen Geschwindigkeiten des Wassers in einem Durchschnit eine mittlere zu finden, hat man verschiedene Arten erdacht. Eine derselben gründet sich hauptsächlich auf die Eigenschaft der Parabol; weil nehmlich die Quadrate der halben Ordinaten derselben wie die ihnen zukommenden Abscissen sind, und die Quadrate der Geschwindigkeiten des in verschiedenen Höhen fließenden Wassers sich zu diesen Höhen eben so verhalten, so kan man die Quadrate der Geschwindigkeiten als die halben Ordinaten, und die Höhen wie die Abscissen einer Parabol ansehen, und also zwischen zwei gegebenen halben Ordinaten, nebst ihren Abscissen eine mittlere halbe Ordinate als die mittlere Geschwindigkeit finden. Man kan von dieser Art in Hr. Wolfs Elementis Mathematicis universæ; in der *Mechanique general* par Dedier, und in mehrern andern nachlesen; mir übergehen sie aber kürze halber, und geben dafür

dafür folgende, welche sich auf die Erfahrung gründet, und durch ein von Hr. Pitot eigens dazu erfundenen Instrument bewerkstelliget wird, dessen Beschaffenheit folgende ist: daß Instrument, womit man die Geschwindigkeit des fließenden Wassers in verschiedenen Tiefen messet, um daraus die mittlere Geschwindigkeit zu finden, bestehet aus zween geraden gläsernen Röhren AB und CD, Fig. 145. die an ihren Enden offen sind, CD. aber unten rechtwinkelt umgebogen ist, und die Gestalt eines Trichters hat. Beide müssen in ihrem innern Durchmesser wenigsten 4 Linien weit, und etwas länger als die größte Tiefe des Wassers sein, wenn sie daher sehr lang gemacht müßten werden, folglich der Gebrechlichkeit zu sehr unterworfen wären, so machet man die Teile, so unter das Wasser getaucht werden, von Messingblech, und füttert die gläserne Röhren oben darauf. Um beide zugleich in einerlei Tiefe senkrecht in das Wasser stellen zu können, so werden beide Röhren solchergestalt an ein langes Stückholz fest gemacht, daß die Oefnungen B und D in gleicher Höhe neben einander zu stehen kommen. Über dieses kan die Röhre AB von B gegen A in Zolle und Linien eingetheilet werden.

Aufgabe.

§. 446. Wie die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des durch einen Durchschnit eines Flusses fließenden Wassers in verschiedenen Tiefen mittelst dem beschriebenen Instrument zu untersuchen, und daraus sowohl die mittlere Geschwindigkeit als auch die Tiefe, in welcher sie sich befindet, zu bestimmen?

Auflösung: 1. Stellet das beschriebene Instrument an dem Orte, wo ihr den Durchschnitt annehmet, auf verschiedene Tiefen, und dergestalt senkrecht in das Wasser, daß die Oefnung des Trichters D gerade gegen dem Stromme gekehret wird; so wird das Wasser in der Röhre AB nur bis an die Oberfläche IE des Flusses, hingegen in CD wegen der Kraft, mit welcher das Wasser gegen dem Trichter stösset, um so höher über IE gegen F steigen, als das Wasser in der Tiefe in welcher der Trichter befindlich, mehr Geschwindigkeit hat als in einer andern.

2. Bemerket an der Einteilung der geraden Röhre AB bei jedesmaliger Eintauchung die Tiefe derselben, und an der Röhre CD die Höhe, auf welche das Wasser über die Oberfläche des Flusses steigt; so geben diese Höhen die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des Wassers in den bemerkten Tiefen.

3. Da ieder schwerer Körper, folglich auch das Wasser in der ersten Sekunde 15 Schuh tief fallet, S. 48., und mit der durch diesen Fall erlangten Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung in der nachmlichen Zeit sich noch einmal soweit folglich 30 Schuh bewegen würde, S. 44., nebst deme die Geschwindigkeiten des fallenden Wassers sich wie die Quadratwurzeln der Höhen, oder die Quadrate der Geschwindigkeiten sich wie die Höhen des Falles selbst verhalten S. 420., so läßt sich, wenn man die Tiefen IB der jedesmaligen Eintauchung mit t' , t'' , t''' , t'''' ; die dabei beobachtete Wasserhöhen EF mit h' , h'' , h''' , h'''' ; die Geschwindigkeiten des Wassers mit x' , x'' , x''' , x'''' benennet, die Geschwindigkeit des Wassers für jede Tiefe finden, wenn man setzt:

$$\sqrt{15:30} = \sqrt{h':x'} = \sqrt{h'':x''} = \sqrt{h''':x'''} = \sqrt{h''':x'''}.$$

oder welches einerlei:

$$15:900 = h':x'^2 = h'':x''^2 = h''':x'''^2 = h''':x'''^2,$$

und denn ist:

$$\sqrt{\frac{900 \times h'}{15}} = x'; \quad \sqrt{\frac{900 \times h''}{15}} = x'',$$

$$\sqrt{\frac{900 \times h'''}{15}} = x'''; \quad \sqrt{\frac{900 \times h'''}{15}} = x''''.$$

4. Um aus diesen Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen eine mittlere Geschwindigkeit m zu finden, so addiret sie zusammen, und dividiret sie mit der Anzahl derselben, so ist $\frac{x' + x'' + x''' + x''''}{4} = m$.

5. Um endlich noch die Tiefe y , in welcher diese mittlere Geschwindigkeit sich befindet, zu erhalten, so betrachte, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten sich wie die Tiefen verhalten; derowegen nehme das Quadrat einer beliebigen zuvor erhaltenen Geschwindigkeit nebst ihrer Tiefe, denn auch das Quadrat der gefundenen mittlern Geschwindigkeit, und setze:

$$x''^2 : m^2 = t'' : y, \text{ so wird } \frac{t'' m^2}{x''^2} = y$$

die Tiefe anbruten, in welcher die mittlere Geschwindigkeit des Wassers sich befindet.

Bermög dem angeführten folgete zwar, daß die Geschwindigkeit des fließenden Wassers in gleichen Tiefen wie z. B. CG und NO fig. 144. sowohl in der Mitte als näher gegen den Ufer einerlei sei; allein die Erfahrung lehret, daß das Wasser

fer sich an den meistens sehr rauhen und unebenen Ufern sehr stark reibe, und mit demselben überhaupt mehr als die Wasserteilchen unter sich selbst zusammenhänge. Daher findet man die Geschwindigkeit des fließenden Wassers in einem Durchschnitt in gleichen Tiefen oft sehr verschieden, und es kommt auch hier oftmals darauf an, die Beobachtungen an verschiedenen Stellen zu machen, und daraus alsdenn das Mittel zu nehmen.

Z u s a z.

§. 447. Wenn man also die Weite, auf welche das Wasser mit der mittlern Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit z. B. in einer Sekunde fließet, bekannt hat, so erhält man die Menge Wasser, welche durch den angenommenen Durchschnitt in eben der Zeit durchfließet, wenn man den Flächeninhalt des Durchschnitts mit dieser Weite multipliciret.

Z u s a z.

§. 448. Wenn demnach die Flächeninhalte der Durchschnitte zweener Flüsse einander gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers ebenfalls gleich sind, so fließet in gleichen Zeiten durch dieselben eine gleiche Menge Wasser.

Sind aber die Flächeninhalte der Durchschnitte ungleich, und die mittleren Geschwindigkeiten gleich, so verhalten sich die in gleichen Zeiten durchfließenden Mengen Wassers wie die Flächeninhalte.

Wären die Flächeninhalte der Durchschnitte gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten ungleich, so sind die in gleichen Zeiten durchfließenden Mengen Wasser wie die mittlern Geschwindigkeiten.

Wenn

Wenn endlich beide ungleich sind, so stehen die in gleichen Zeiten durchfließenden Mengen Wasser in einer zusammengesetzten Verhältnis der Durchschnitflächen, und mittlern Geschwindigkeiten.

Z u s a z.

§. 449. Da durch einen jeden Durchschmit eines regelmässigen oder unregelmässigen aber beständigen Flusses in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser fließet, §. 442., wenn auch die Durchschnitte ungleich sind; so stehen die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers in zween solchen Durchschnitten in verkehrter Verhältnis der Flächeninhalte derselben.

Lehrsatz.

§. 450. Das Wasser fließet in einem durchaus regelmässigen Rinnsal, dessen Grundfläche wie eine schief liegende gerade Fläche abhanget, mit vermehrter Geschwindigkeit.

Beweis: Da das Wasser ein schwerer Körper ist, und diese, wenn sie über eine schiefe Fläche laufen, ihre Geschwindigkeit vermehren, §. 60. so mus dieses auch beim Wasser geschehen, welches über die schief liegende Grundfläche seines Rinnsals dahin fließet.

Z u s a z.

§. 451. Weil also die Teilchen des in einem abhängenden Rinnsal fließenden Wassers um so geschwin-
der übereinander hinweg fließen, als sie sich schon weiter von dem Anfangsorte A ihres Laufes entfernt haben, so mus die Wassertiefe AB beim Anfang am größten sein; aber immer abnehmen, wie FG, und DE, wie sich das Wasser von A mehr entfernt; so das die

Fig. I 46.

Oberfläche AD des Wassers mit der Grundfläche. BE des Rinnsals nicht parallel sein kan.

Z u s a z.

§. 452. Wenn man annimmt, als ob das Wasser aus einem stets gleichhoch angefüllten Behälter bei AB in den abhängenden Rinnsal ABED flösse, so hat erstlich jedes Wasserteilchen an der Oberfläche bei A eigentlich noch keine Geschwindigkeit; ist es aber einmal von A bis D geflossen, so ist die Geschwindigkeit an der Oberfläche in D wie \sqrt{CD} §. 420., zweitem hätte ein jedes Wasserteilchen am Grunde bei B ebenfalls noch keine Geschwindigkeit, so würde dasselbe wenn es nach E gekommen, wegen der Höhe HE seines Falles seine Geschwindigkeit daselbst wie \sqrt{HE} sein; da aber die Wasserteilchen in B schon eine Geschwindigkeit $= \sqrt{AB}$ haben, §. 420. die aber währenden Laufe nicht vermehret wird, so ist die Geschwindigkeit dieser Wasserteilchen, wenn sie in E gekommen, wie $\sqrt{HE} + \sqrt{AB} = \sqrt{CE}$. D. i. die Geschwindigkeiten des Wassers an der Oberfläche sind wie die Quadratwurzeln aus der Höhe ihres Falles von Anfang ihres Laufes bis zu dem Orte des Durchschnitte, und die Geschwindigkeiten des Wassers in was immer für einem Punkt unter der Oberfläche verhalten sich wie die Quadratwurzeln des Falles von der Oberfläche A bis zu dem besagten Punkt. Doch wird hier ebenfalls vorausgesetzt, daß keine Reibung des Wassers statt habe.

Z u s a z.

§. 453. Wendet sich die abhängende Grundfläche BE eines Kanals nach der Hand in eine horizontale wie EM, so wird zwar das Wasser in demselben noch eine Strecke mit der durch den Fal über die abhängende Grund-

Grund

Grundfläche erlangten Geschwindigkeit fortfließen, dieselbe wird sich aber nicht allein nicht weiter vermehren, sondern nach und nach wieder abnehmen, und endlich keine andere Geschwindigkeit mehr haben, als welche blos von dem Drucke der obern Wasserteilchen gegen die untern entsteht. Daher kommt es hauptsächlich, daß das Wasser in natürlichen und unregelmäßigen Rinnfälen an einigen Orten langsamer, und an andern wieder geschwinder fließet.

Lehrsatz.

§. 454. Wenn ein Fluß anläuft, oder sich vermehret, so verhält sich die in einer gewissen Zeit durch einen Durchschnitt fließende Menge Wasser zu der Menge, welche in eben der Zeit an eben dem Orte vor dem Anlaufen durchgeflossen ist, wie das Produkt aus dem Flächeninhalt des Durchschnittes und mittlern Geschwindigkeit des angeloffenen Flusses zum Produkt aus dem Flächeninhalt und mittlern Geschwindigkeit vor dem Anlaufen.

Beweis: Wenn ein Fluß anläuft, so wird sowohl seine Durchschnittsfläche, als auch seine mittlere Geschwindigkeit größer als sie zuvor war, und man kan die in beiden verschiedenen Zuständen des Flusses genomene Durchschnitte und mittlere Geschwindigkeiten als von zweenerlei Flüssen ansehen; die in zween Flüssen durch angenommene Durchschnitte in gleichen Zeiten fließenden Mengen Wasser aber sind in einer zusammengesetzten Verhältnis ihrer Durchschnittsflächen und mittlern Geschwindigkeiten, §. 448. also ist auch erwiesen, was oben ausgesprochen worden.

Da hier der Hauptabsicht gemäß von dem Lauf des Wassers in Kanälen und Flüssen nur die er-

sten Gründe angeführt werden können, so müssen sich dieienige, welche davon mehrer zu wissen verlangen, in Werken, welche eigens von dieser Materie, folglich ausführlicher handeln, Rathshohlen.

Zweites Hauptstück.

Von der Bewegung des Wassers durch den Druck der Luft.

Erklärung.

Fig. 147. §. 455. Ein Gefäß welches wie CD unten und oben mit einer Oefnung versehen, die kleiner als der mittlere Körper desselben ist, wird insgemein ein einfacher oder Stichheber (Diabetes) genent.

Erklärung.

§. 456. Wenn ein hohler Cylinder wie EF unten eine kleinere Oefnung als seine Grundfläche hat, und mit einen wohlpassenden Kolben, der sich aber doch auf und nieder ziehen läßt, versehen wird, so pflegt man ihn eine Saugsprize (Syrinx) zu nennen.

Erfahrung.

§. 457. Wenn eine an beiden Enden offene Röhre AB, oder ein Stichheber CD, oder eine Saugsprize EF mit einen Ende B, D, oder F in ein Wasser gesteckt wird, und an dem andern Ende A oder C die Luft durch Anlegung des Mundes, bei E aber durch Anziehung des Kolbens ausgesaugt, oder verdünnet wird,

wird, so steigt das Wasser in der Röhre AB, in dem Stichheber CD, oder in der Gaugspriße EF mehr oder weniger in die Höhe, nachdem die Luft mehr oder weniger ausgesaugt oder verdünnet worden, und verbleibt so lang in dieser Höhe stehen, als die Luft sich in diesen Zustand erhält.

Die Ursach hievon ist, weil die Luftsäule des Dunstkreises gegen die Oefnung A, C, oder E an welcher gesauget wird, zu drücken verhindert wird, hingegen jene Luftsäule, welche auf die Wasserfläche und folglich auch gegen die Oefnung B, D und F ungehindert wirkt, und das Wasser durch ihren Druck mehr oder weniger in die Höhe treibet, nachdem die Luft auf der einen Seite durch das Gaugen verdünnet wird.

Z u s a z.

§. 458. Wenn man die Röhre AB oder den Stichheber CD, an beiden Enden offen ganz in das Wasser tauchet, hierauf das obere Ende A oder C mit dem Finger zuhält, und so wieder aus dem Wasser zieht, so bleibt das Wasser eben so in der Röhre und in dem Heber hangen, als ob die Luft ausgesauget worden wäre, weil die Luft durch die Eintretung des Wassers anfänglich wirklich ausgetrieben wird, und die Luftsäule des Dunstkreises alsdenn nur gegen das untere Ende drücken kan.

Doch wird das Wasser sich in Röhren oder Gaugsprißen, die unten gar zu weit sind, nicht so leicht hangend erhalten, sondern wieder zurück fallen; weil die Luft sich zwischen dem Wasser und den innern Wänden leichter hinein schleicht, folglich obenher dicker wird, und also dem Druck der Luftsäule des Dunstkreises gegen die untere Oefnung

nung mehr widersteht. Daher pflegt man die untere Oefnung der Sticheheber und Saugsprißen gewöhnlich unten kleiner als den Durchmesser ihres mittleren Körpers, welcher sonst nach Belieben gestaltet sein kan, zu machen.

Z u s a z.

Fig. 147. §. 459. Weil eine Luftsäule des Dunstkreises einer Wassersäule von gleicher Grundfläche und 32 Schuhhöhe das Gleichgewicht zu halten vermag, §. 386., und das Wasser in der Röhre AB, oder in dem Sticheheber CD, oder in einer Spritze EF nach Ausaugung oder Verdünnung der Luft nur durch den Druck der Luftsäule des Dunstkreises gegen das untere Ende in die Höhe getrieben wird, so kan das Wasser in besagten Gefäßen durch blosses Saugen oder Verdünnen der Luft niemals höher als auf 32 Schuh gebracht werden.

E r l ä u r u n g.

Fig. 148. §. 460. Eine an beiden Seiten offene, und etwann wie ABC gebogene Röhre wird insgemein ein Winkelheber genent. Doch kan auch diese Röhre auf verschiedene andere Art z. B. wie MN gebogen, oder auch ungleichweit sein, und dennoch als ein Heber gebraucht werden.

E r f a h r u n g.

§. 461. Wenn man einen Winkelheber ABC mit einem Ende C in ein Wassergefäß stellet, das andere A aber dergestalt richtet, daß es mit der Wasserfläche DO in gleicher Höhe ist, und an demselben mit dem Mund die Luft aussauget, so steigt das Wasser des Gefäßes in den Heber bis in B, und fället von da bis in A; weil die Luftsäule des Dunstkreises stärker gegen die

Von der Bewegung des Wassers 2c. 365

die Wasserfläche DO drückt, als die ausgesogene oder verdünnte Luft in den Heber entgegen wirken kan. Zieheth man nun den Mund von A ab, so bleibt das Wasser in dem ganzen Heber gleichsam hangen, und fällt weder zur einen noch andern Oefnung A oder C heraus; weil die Luftsäulen des Dunstkreises auf beide Oefnungen gleichstark drücken, und dem in beiden Armen befindlichen Wasser, dessen Höhe in ieder $= BH$ ist, das Gleichgewicht hält.

Wäre aber das eine Ende des Hebers in F, und folglich höher als die Wasserfläche DO, so wird, nachdem die Luft bei F ausgesaugt worden, das Wasser zwar die Röhre CBF anfänglich ganz erfüllen, aber sobald man den Mund von F hinweg ziehet, so gleich wieder in das Gefäß zurückfallen; weil das in dem Arme BF enthaltene Wasser, dessen Höhe $= BE$ ist, der Luftsäule des Dunstkreises, welche gegen F drückt, keinen so grossen Widerstand leisten kan, als das in dem Arme BC befindliche, dessen Höhe $= BH$ ist, der auf die Wasserfläche DO, und also gegen die Oefnung C drückenden Luftsäule machet; derowegen mus das Wasser nothwendig dahin getrieben werden, wo es den wenigsten Widerstand antrifft.

Ist endlich das Ende A niedriger als die Wasserfläche IL des Gefäßes, so wird das Wasser nach ausgesaugter Luft ebenfalls in beide Arme eindringen, aber nachdem man die Oefnung A wieder frei machet, so lauft das Wasser so lang durch dieselbe bis die Wasserfläche IL sich so weit in dem Gefäß erniedriget hat, daß sie bis in DO gekommen, und mit A gleiche Höhe erhält. Die Ursach dessen ist, weil die Luftsäule, welche gegen die Wasserfläche IL drückt, den Widerstand des in BL enthaltenen Wassers, dessen Höhe $= BE$

366 V. Abschnit. II. Hauptstück.

BE ist, leichter als die Luftsäule, welche gegen A drückt, den Widerstand des in AB befindlichen Wassers, dessen Höhe $= BH$ ist, überwinden kan. Daher nothwendig das Wasser gegen die Seite ausläuft, wo es den wenigsten Widerstand findet.

Z u s a z.

§. 462. Wenn also die Oefnung A um EH niedriger als die Oberfläche IL des Wassers im Gefäß ist, so wird das Wasser nach ausgesaugter Luft bei A mit einer Geschwindigkeit auslaufen, welche es bekäme, wenn es von E bis H frei gefallen wäre; denn dem übrigen Teil, wovon die Höhe BE ist, wird durch dem Druck der Luftsäule das Gleichgewicht gehalten. So wie aber die Wasserfläche währenden Auslaufen immer niedriger wird, so wird EH und folglich auch die Geschwindigkeit kleiner, wenn das Gefäß keinen andern Zufluß hat.

Z u s a z.

§. 463. Da eine Luftsäule des Dunstkreises einer Wassersäule von gleichem Durchmesser und 32 Schuhhöhe eben das Gleichgewicht halten kan §. 386., so darf die Höhe EB, nemlich von der Wasserfläche bis zum höchsten Punkt des Hebers auch nicht grösser als 32 Schuh sein; weil die Luftsäule, welche auf die Wasserfläche drückt das Wasser im widrigen Falle nicht bis dahin treiben könnte, so stark man auch bei A saugen möchte.

E r f a h r u n g.

Fig. 149. §. 464. Wenn man eine hohle gläserne, oder von anderer Materie gemachte Kugel A oder B, welche mit einem engen Röhrchen, das bei E und F eine kleine Defo

Defnung hat, versehen ist, anfangs auf ein gelindes Kohlenfeuer legt, damit sie sich wohl erwärme; hierauf das Röhrchen mit der Defnung in ein Wasser steckt, so bringt das Wasser sogleich in die Kugel hinein, und füllet sie mehr oder weniger, nachdem sie nehmlich erwärmet worden. Die Ursach dessen aber ist, weil die Luft in der Kugel durch die Wärme viel dünner als die äuffere gemacht wird, §. 369. so drückt die Luftsäule des Dunstkreises stärker auf das in dem Gefäß befindliche Wasser als die in der Kugel verdünnte Luft widerstehen kan, und folglich wird das Wasser so lang in die Kugel getrieben, bis die in derselben noch befindliche Luft in einen so engen Raum zusammengedrückt, und so dicht wird, daß sie dem Druck der äussern Luftsäule das Gleichgewicht halten kan.

Dieses giebt Mittel an die Hand, ein mit einer sehr engen Defnung versehenes Gefäß auf eine leichte Art mit Wasser oder einer andern flüssigen Materie anzufüllen; welches sonst schwer oder gar nicht von statten gehet.

Z u s a z.

§. 465. Stellet man die Kugeln A und B welche nach dem vorigen §. gefüllet worden, dergestalt auf ein gelindes Kohlenfeuer, oder an einen andern warmen Ort, daß die innere Defnung des Röhrchens durch das Wasser bedeckt wird, so fängt es sogleich an durch die Defnungen E und F auszulaufen, und stellet einen Springbrunn vor. Die Ursach dessen ist ebenfalls in dem Druck der Luft zu suchen; denn da die in der Kugel zurückgebliebene Luft durch die Wärme stärker ausgezehnet wird, als die Luftsäule des Dunstkreises gegen die Defnung E oder F drücken kan, so drückt sie

sie auf die Fläche des in der Kugel befindlichen Wassers, und treibet solches durch die Oefnung aus.

Wie nach beiden vorigen §§. die Ausdehnung der Luft in der Kugel und die daher rührende Bewegung des Wassers durch die Wärme zu Wege gebracht wird, eben so läßt dieses sich auch durch die Verbünnung oder Verdickung der Luft mittelst der Luftpumpe bewürken. Es ist demnach an sich einerlei, durch was der Zustand der Luft in der Kugel geändert wird. Wir könnten hier von der Bewegung des Wassers durch den Druck der Luft noch ein und anderes anführen, wenn wir nicht die Weitläufigkeit vermeiden müßten. Wir begnügen uns also damit allein, daß wir den Anfang nur den Grund gezeigt haben, nach welchem das Wasser durch den Druck der Luft sowohl durch die Kunst, als auch nicht selten von der Natur bewegt wird.

Drittes Hauptstück.

Von dem Stöße des Wassers gegen ihm entgegengesetzte Flächen.

Erklärung.

§. 466. Durch den Stoß des Wassers wird jene Kraft verstanden, mit welcher es an eine ihm entgegen gesetzte Fläche anläuft.

Z u s a z.

§. 467. Der Stoß eines festen Körpers gegen einen andern mus von dem Stöße des Wassers wohl unter-

terschieden werden; denn wie der erstere wegen dem festen Zusammenhang seiner Theilchen gleich bei der ersten Berührung ganz und auf einmal erfolgt, so kan der andere, da die Wasserteilchen nicht so fest zusammenhangen, nur so wie sie aufeinander folgen, und die Anstoßfläche berühren, nach und nach geschehen.

Z u s a z.

§. 468. Da es also bei der Kraft des Stoses des Wassers zugleich auf die Menge der anstossenden Wasserteilchen, und auf die Gewalt, mit welcher sie stossen, ankommt, so mus dieselbe sowohl von der Größe der Anstoßfläche, und Dichtigkeit oder eigenthümlichen Schwere des Wassers selbst, als von der Geschwindigkeit und Richtung abhängen.

L e h r s a z.

§. 469. Die Kraft des Stoses des Wassers, welcher senkrecht wider eine ruhende Fläche geschihet, ist gleich dem Gewichte eines Volumen Wassers, daß die gestossene Fläche zur Grundfläche, die Höhe des darüberstehenden Wassers aber zur Höhe hat.

Beweis: Der Druck, den die horizontale Grundfläche CD eines gleichweiten Gefäßes AD von dem darinn enthaltenen Wasser auszustehen hat, ist der ganzen Schwere dieses Wassers d. i. der Schwere eines Volumens Wasser, welches eben diese Grundfläche und die Höhe AB des darüberstehenden Wassers zur Höhe hat, gleich §. 336. Stellet man sich nun vor, als ob diese Grundfläche nur ein wenig von dem Gefäße getrennet würde, ohne daß das Wasser dadurch noch einen merklichen Zuwachs an der Geschwindigkeit bekäme, so würde der Druck des Wassers gegen die Grundfläche eben anfangen sich in einen Stoß zu vers

Fig. 150.

wandeln, und da anfangs noch kein merklicher Zuwachs an der Geschwindigkeit gegeben ist, so wird auch seine Kraft noch dem Gewichte eines Volumens Wasser gleich sein, dessen Grundfläche die gestossene Fläche, und die Höhe jene des darüberstehenden Wassers ist.

Lehrsatz.

§. 470. Die Kraft des Stosses des Wassers, der senkrecht gegen eine ruhende Fläche geschihet, ist gleich dem Gewichte der Menge Wasser, welche sich in einem Momente durch die Oefnung der Anstossfläche ergiesset, multiplicirt durch die Geschwindigkeit; oder ist gleich der Schwere eines Wassertörpers, dessen Grundfläche die Anstossfläche, und die Höhe das Quadrat der Geschwindigkeit ist.

Beweis: Die Geschwindigkeit des Wassers an der Grundfläche CD , worauf nemlich der Stoss geschihet, ist eben so gros als ob es von A bis B frei gefallen wäre §. 425.; daher läst sie sich durch \sqrt{AB} ausdrücken §. 420.; und folglich ist die Menge Wasser, welche sich in einem Momente ergiesset, gleich dem Product der Grundfläche CD in die Quadratwurzel der Höhe AB §. 419.; und da überhaupt die Bewegungskraft eines Körpers in dem Product seiner Masse in die Geschwindigkeit bestehet, so ist endlich $CD \times \sqrt{AB}$ die Menge oder Masse des in dem Momente ausfliessenden Wassers, und $CD \times \sqrt{AB} \times \sqrt{AB}$ ein Wassertörper, dessen Gewicht die Kraft des Stosses ausdrückt.

3ter Satz.

§. 471. Da $\sqrt{AB} \times \sqrt{AB} = AB$, so ist auch $CD \times AB$ ein Wassertörper dessen Gewicht die Kraft des Stosses ausdrückt; wodurch also das was §. 469. erwiesen worden, ebenfalls bestätigt wird.

Z u s a m m e n f a s s u n g

§. 472. Das, was bisher von der Bestimmung der Kraft des Stoses des Wassers gegen eine ruhende Fläche gesagt worden, ist nur von einem solchen Stos zu verstehen, der dem Druck des Wassers gegen die Oefnung des Ausflusses selbst gleich ist; oder in so fern das Wasser sonst noch keine andere Geschwindigkeit hat, als die der Quadratwurzel der Höhe AB gleich ist. Entfernet man aber die Fläche CD, welche die Oefnung B geschlossen hat, beträchtlich abwärts, so daß das Wasser dadurch schon einen beträchtlichen Zuwachs an seiner Geschwindigkeit erhält, so würde man die Kraft des Stoses zu gros berechnen, wenn man sie nach dem vorigen §. dem Gewichte der Wassersäulen AD gleich machte. Denn obwohl zwar in diesem Falle die Geschwindigkeit in der Quadratwurzel von AD besteht, so geht doch in der nehmlichen Zeit nicht mehr Wasser durch die Oefnung B heraus, als in dem Falle da die Anstosfläche nahe bei B gehalten wird. Wenn also die Menge Wasser, so in einem Momente durch die Oefnung B fließet, $= B \times \sqrt{AB}$ ist §. 470., so ist die Kraft des Stoses gegen CD in gegenwärtigen Falle $= B \times \sqrt{AB} \times \sqrt{AD}$, oder vielmehr dem Gewichte dieses Wasserkörpers.

Z u s a m m e n f a s s u n g

§. 473. Eben so würde man an einem Wasserbehälter MN, der den Ausfluß BD an der Seite und von einer beträchtlichen Höhe hat, zur Ermessung der Kraft des Stoses des ausfließenden Wassers die Oefnungsfläche BD nicht durch die ganze Höhe AD, sondern durch eine mittlere Proportional $\frac{AD + AB}{2}$ =

AC

AC

AC multipliciren müssen, um den Wasserkörper zu bekommen, dessen Gewicht der Kraft des Stosses gleich ist.

Fig. 153. §. 474. Lief

Fläche AB, so
allemale durch di
faller, d. i. durch
ist das Quadrat

des Stosses gegen die ruhende Fläche in der Schwere
eines Wasserkörpers $m \times AC$ gleich.

fliegende
desselben
des Ab-
folglich
die Kraft

Z u s a m m e n f a s s u n g .

oder $900 : 15 = 20 : AC$, folglich $\frac{15cc}{900} = AC$,

und nach gemächter Reduktion $\frac{cc}{60} = AC$; daraus

ist zu ersehen, daß man das Quadrat der Geschwindigkeit des Strommes nur durch 60 dividiren müsse, um den Quotienten für die Höhe des Abfalles zu erhalten; und das man den Flächeninhalt m durch AC multipliciren

ciren müsse, um die Schwere dieses Wasserkörpers für die Kraft des Stos zu bekommen, erhellet aus S. 474.

Man sieht wohl, daß man aus der bekannten Höhe des Abfalles und der Anstoßfläche, oder aus der gegebenen Kraft des Stos die Geschwindigkeit auf eben diese Art finden könne.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

S. 476. Gölle das Wasser eines Behälters T, Fig. 154. vermög einem eröffneten Schußbre BG unten durch eine Defnung BD deren Flächeninhalt $= m$ seie; und von da noch weiter über die schließliegende Rinne DF, und man verlange die Kraft des Stos gegen die ruhende Fläche FL, die wir ebenfalls $= m$ annehmen wollen, zu wissen; so betrachtet erstlich, daß man zwischen den Höhen AB und AD die mittlere proportional AC nehmen müsse, um diejenige Höhe zu erhalten, durch deren Quadratwurzel die Geschwindigkeit des Wassers am Ergießungsarte vorgestellt wird S. 473., und daß man die Geschwindigkeit, welche das Wasser in seinem fernern schiefen Falle von D nach F durch \sqrt{DE} ausdrücken könne S. 62.; daher wird die Masse des in einer gewissen Zeit durch die Defnung BD auslaufenden Wassers $= m \times \sqrt{AC}$ seyn, S. 470.; und stets gleich verbleiben, der schiefe Rinnsal DF mag übrigens wie immer beschaffen sein, und die Kraft des Stos gegen die ruhende Fläche FL $= m$ wird folglich dem Gewichte eines Wasserkörpers gleich sein, dessen Inhalt $= m \times \sqrt{AC} \times \sqrt{DE}$ ist.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

S. 477. Wäre aber die Anstoßfläche m nicht in der Ruhe, wie wir bisher vorausgesetzt haben, sondern sie

Ha 3

hätte

hätte ebenfalls, wie z. B. die Schaufel eines Wasserrades eine Bewegung und zwar nach der Richtung des anstossenden Wassers, und folglich eine gewisse Geschwindigkeit a , so ist klar, daß, wenn sie der Geschwindigkeit a des Strommes gleich ist, die Anstoßfläche in solchem Falle keinen Stoß vom Wasser empfangen könne; wenn aber die Geschwindigkeit der Anstoßfläche kleiner als die des Strommes ist, daß sie alsdann nur eine Geschwindigkeit $c - a$, d. i. eine, die dem Unterschied von beiden Geschwindigkeiten gleich ist, erhalten werde. Da wir nun zuvor §. 475. gewiesen haben, daß man das Quadrat der Geschwindigkeit des Strommes durch 60 dividiren müsse, um die Höhe des Abfalles x zu finden, so ist also in diesem Falle $\frac{c - a^2}{60} = x$; und folglich $m \times \frac{c - a^2}{60}$ ein Wasserkörper, dessen Schwere die Kraft des Stoses ausdrückt, die die mit der Geschwindigkeit a schon verfehene Fläche m durch das Wasser erhält, dessen Geschwindigkeit schon bekannt wäre.

Gienge aber die Anstoßfläche m dem Stromme mit einer gewissen Geschwindigkeit entgegen, so würde $m \times \frac{c + a^2}{60}$ die Kraft des Stoses sein.

Übrigens steht man nicht, wie man zu verfahren hätte, wenn aus der gegebenen Höhe des Abfalles, die Geschwindigkeit des Rades, und die Kraft des Stoses zu suchen wäre. u. m. d. g.

Ebenfalls läßt sich daraus erkennen, daß, wenn die Geschwindigkeit eines Wasserrades so groß als die des Strommes selbst sein sollte, dasselbe alsdann der Maschine die es treiben, oder deren Last über-

überwinden sol, keinen Nachdruck geben könnte. Diejenigen betrügen sich also sehr, welche glauben, daß sie geschwinder sie das Wasserrad einer Maschine umlaufen lassen, um so größere Wirkung sie sich auch versprechen könnten. Man wird aus dem folgenden ersehen, wie groß die Geschwindigkeit des Wasserrades einer Maschine in Vergleichung der des Stromes sein kan, damit es die größtmöglichste Kraft erhalte.

Lehrsatz.

S. 478. Wenn ein Wasserrad einer Maschine zugleich die größte Geschwindigkeit, und den größten Nachdruck geben sol, so darf es nicht mehr als $\frac{1}{2}$ der ungebundenen Geschwindigkeit des Stromes erhalten, und die gemässigte Geschwindigkeit des Stromes mus nur $\frac{2}{3}$ der ungebundenen sein.

Beweis: Betrachte, daß, wenn die ungebundene Geschwindigkeit des Stromes C ist, und das Wasserrad sich mit einer gewissen Geschwindigkeit x nach demselben bewegt, der Strom alsdenn nur mit dem Unterschied dieser Geschwindigkeiten d. i. $C - x$ in das Rad wirken könne S. 477., und folglich eine gemässigte Geschwindigkeit erhalten müsse, wäre nun $x = C$, so würde $C - x = 0$ sein, folglich könnte in diesem Falle das Rad und die Maschine keine Wirkung erhalten; wäre aber $x = 0$, oder das Rad in der Ruhe, so würde zwar $C - x = C$ sein, und folglich das Rad die ganze Macht des Stromes empfangen, weil aber das Rad in diesem Falle ohne Geschwindigkeit angenommen wird, so kan es keine Wirkung auf die Maschine machen. Daraus ist also zu erkennen, daß die Wirkung auf die Maschine zugleich sowohl von dem Quadrate der gemässigten Geschwindigkeit des Strom-

Fig. 155.

mes, als von der Geschwindigkeit des Stabes, und folglich der Maschine abhänge, — derowegen allezeit $= C - x^2$ x x seie. Und also wie das eine von beiden anwachset, daß andere immer abnehmen müsse. Es kommt also lediglich darauf an, diese zwei Grössen so zu wählen, oder einzurichten, daß ihr Product, welches die Wirkung der Maschine vorstellen kan, das grösstmögliche werde. Um nun dieses zu erhalten, so seie ABED ein Rechteck, wovon AB die ungebundene Geschwindigkeit C des Stromes, mit welcher er auf das ruhende Manisfloß, AD = AB aber die Geschwindigkeit x des Stabes in seinem Falle vorstellen; wenn dieselbe (der) Geschwindigkeit des Stromes selbst gleich wäre, theilet man dieses Rechteck in eine beliebige Anzahl z. B. in 6 gleiche Elemente durch die Linien FI, GM, HR u. s. w. und ziehet die Diagonal BD, so wird jede derselben dergestalt in zween Teile FL und LI, GO und OM, u. s. w. getheilet, daß, so wie die einen in arithmetischer Progression abnehmen, die anderen anwachsen. Eben derowegen können wir die Quadrate von AB, FL, GO, HN u. s. w. als die Quadrate der gemäßigten Geschwindigkeiten $C - x$, B (welches $= 0$ ist), LI, OM, NR u. s. w. als die Geschwindigkeiten x des Stabes oder der Maschine in soviel verschiedenen Fällen ansehen; und setzen wir, daß die ungebundene Geschwindigkeit des Stromes $= AB = 6$ seie, so wird $FL = 5$, $GO = 4$, $HN = 3$, u. s. w. die gemäßigten Geschwindigkeiten, $B = 0$, $LI = 1$, $OM = 2$, $NR = 3$ u. s. w. die Geschwindigkeiten x des Stabes in verschiedenen Fällen vorstellen; die Produkte aus den Quadraten der erstern in die andere werden folgende sein, und die Grösse der Wirkungen in die Maschine vorstellen, wie folget:

AB²

$$\overline{AB}^2 \times B = 36 \times 0 = 0.$$

$$\overline{FL}^2 \times LI = 25 \times 1 = 25.$$

$$\overline{GO}^2 \times OM = 16 \times 2 = 32. \text{ grösste Wirkung.}$$

$$\overline{HN}^2 \times NR = 9 \times 3 = 27.$$

$$\dots\dots\dots = 4 \times 4 = 16.$$

$$\dots\dots\dots = 1 \times 5 = 5.$$

$$\dots\dots\dots = 0 \times 6 = 0.$$

Daraus ist also zu erkennen, daß im ersten und letzten Falle keine Wirkung erfolgen könne, wie schon oben gesagt worden, und daß das grösste Produkt $\overline{GO}^2 \times OM$ sei. Da aber $GO = \frac{1}{2} AB$, und $OM = \frac{1}{2} AB$ ist, so ist auch erwiesen, daß die gemässigte Geschwindigkeit des Stromes nur $\frac{1}{2}$, und die Geschwindigkeit des Stabes nur $\frac{1}{2}$ der ungebundenen Geschwindigkeit des Stromes haben könne, oder es mus $c -$

$x = \frac{2c}{3}$, und $x = \frac{c}{3}$ sein, wenn die Maschine die grösstmögliche Wirkung machen sol.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 479. Da man um denjenigen Wasserkörper zu erhalten, dessen Gewicht die Kraft des Stoses gegen eine mit einer gewissen Geschwindigkeit x bewegten Schaufel ausdrückt, die Fläche m der Schaufel durch

$\frac{c - x^2}{60}$ multipliciren mus §. 477, $c - x$ aber nur

$\frac{2c}{3}$ sein darf, wenn die grösstmögliche Wirkung erfolgen sol, §. 478., so ist $\frac{2c}{3} \times \frac{2c}{3} = \frac{4cc}{9}$ und

$\frac{4cc}{9 \times 60} \times m =$ dem Wasserkörper, dessen Gewicht

die Kraft des Stoses ausdrückt, mit welcher die Ma-

chine die größtmögliche Wirkung machen kan. Daraus ist also zu ersehen, daß man nur auf $\frac{1}{2}$ derjenigen Kraft, mit welcher die ungebundene Geschwindigkeit eines Stromes gegen eine ruhende Fläche wirkt, Rechnung machen könne, wenn nemlich die Wirkung der Maschine die größtmögliche seyn solle; d. i. wenn sie zugleich die größtmögliche Geschwindigkeit, und den größten Nachdruck empfangen sol.

man an einer vorkommenden Maschine, die in Wasserrad getrieben wird, untersuchen, nach der größtmöglichen Wirkung einge-
 eile, so hat man nur die Geschwindigkeit,
 Höhe des Abfalles des Wassers, und die
 indigkeit des Rades zu untersuchen, und
 1, ob d
 an sie g
 n größtm
 rde sie A
 chine langsamer
 Falle könte man
 ben, im andern aber ist ihr zuviel aufgelegt wor-
 den.

Schlussatz.

§. 480. Die Kraft des senkrechten Stoses des Wassers verhält sich zu der des schiefen Stoses gegen eine unbewegliche Fläche, wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des Einfallwinkels, den die Richtung des Wassers mit der Anstoßfläche macht.

Fig. 156. Beweis: Wenn GH parallel zu IL die Seiten-
 wände eines Kanals, AC die ungebundene Geschwin-
 digkeit des darinfließenden Wassers, BD und EF die
 Grund-

Grundlinien m und n aber die Inhalte zweier vertikalen Flächen vorstellen, wovon die erste senkrecht, die andere aber schief auf AC steht, und man ferner AO parallel zu EF , und AE senkrecht darauf, desgleichen OC parallel zu AB zieht, so sieht man erstlich: daß das Wasser gegen die senkrechte Fläche BD mit ihrer ganzen und ungebundenen Geschwindigkeit AC wirken könne; zweiten da die ungebundene Geschwindigkeit AC durch das Parallelogram $AOCE$ in zwei zusammenge setzte Geschwindigkeiten AO und AE zertheilt wird, und die eine AO , indem sie parallel zu EF ist, in die Fläche BF gar nicht wirken kan, daß nur die Geschwindigkeit AE übrig bleibe, mit welcher das Wasser seinen Nachdruck gegen die schiefe Fläche ausüben kan. Daher ist die Masse des Wassers, welche in einer gewissen Zeit gegen die senkrechte Fläche BD stösset, gleich dem Flächeninhalt m derselben multiplicirt durch AC , und weil auf die schiefe Fläche EF in einem Augenblick nicht mehrer Wasserteilchen als auf die Fläche BD stossen, so ist die Masse des Wassers, welche in eben der Zeit gegen die schiefe Fläche stossen, gleich dem Flächeninhalt n multiplicirt durch AE . Nun aber ist die Kraft des Stoses gleich dem Produkt aus der Masse in die Geschwindigkeit, also ist die Kraft des Stoses gegen die senkrechte Fläche $= m \times AC^2$, und die gegen die schiefe Fläche $= n \times AE^2$ folglich die erste zur andern wie $AC^2 : AE^2$. Wenn man nun den Winkel ACE als den Einsalwinkel betrachtet, so stellet AC den Sinus totus, und AE den Sinus des Einsalwinkels vor, und also ist auch erwiesen, daß die Kraft des senkrechten Stoses des Wassers sich zu der des schiefen: wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des Einsalwinkels verhalte.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 481. Zieht man DH parallel zu EF , so werden die Dreiecke ACE und DHB einander ähnlich,
 also ist $AC : AE = DH : DB$,
 und $\overline{AC}^2 : \overline{AE}^2 = \overline{DH}^2 : \overline{DB}^2$,
 und da $DH = EF$ ist,
 so ist auch $\overline{AC}^2 : \overline{AE}^2 = \overline{EF}^2 : \overline{DB}^2$,
 folglich verhält sich auch die Kraft des senkrechten Stos-
 ses zu der des schiefen wie das Quadrat der Grundli-
 nie der schiefen Fläche, zum Quadrat der Grundlinie
 der senkrechten.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 482. Um also die Kraft eines schiefen Stoses
 gegen eine ruhende Anstoßfläche zu finden, hat man erst-
 lich die Kraft des senkrechten nach §. 476. zu suchen,
 und den Einfallwinkel zu messen, dann aber zu setzen:
 wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des
 Sinus des Einfallwinkels also verhält sich die Kraft des
 senkrechten Stoses zu der des schiefen, oder nach §.
 481. zu verfahren.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

§. 483. Eben so würde man sich in der Berech-
 nung der Kraft eines schiefen Stoses zu verhalten ha-
 ben, wenn die Anstoßfläche anstatt zu den Seitenwän-
 den GH und IL schief zu stehen, sich zu dem Horizont
 neigete.

Wäre das Wasser in der Ruhe, und die An-
 stoßfläche würde gegen dasselbe bewegt, so hätte
 man sich in der Berechnung der Kraft des Stoses
 oder des Widerstandes, den in solchen Falle das
 Wasser gegen die Fläche machen würde, auf die
 oben angezeigte Art zu benehmen.

An-

Anmerkungen von Wasserrädern.

§. 484. I. Wenn man sich zur Bewegung der Maschinen des Wassers bedient, so hat man vor allen durch genaues Nivelliren zu untersuchen, wie hoch sein Gefäl ist, oder wie hoch man es durch Dämme oder Wehren schwellen kan ohne die anliegende Gegend zu überschwemmen, oder in andere Ungelegenheiten zu verfallen. Zugleich hat man zu beobachten, ob das Wasser in gehöriger Menge vorhanden, d. i. ob der Zufluß mit dem Abfluß proportioniret sei; denn wäre der Abfluß grösser als der Zufluß, so würde das Wasser nicht stäts eine gleiche Höhe erhalten, und folglich die Kraft des Stoses gegen die Radschaufel vermindert werden; wäre aber der zweite grösser als der erste, so würde zwar die Maschine stäts ihren gleichen Trieb haben, aber der Wasserbehälter ober der Schleusse würde überlaufen, und Überschwemmungen verursachen. Da es sich nun sehr oft ereignet, daß man Maschinen an Flüsse bauet, deren ganze Menge Wasser man nicht nöthig hat, so hat man allezeit die Anstalt zu treffen, daß das überflüssige Wasser durch einen eigenen Überfal ungehindert ablaufen, oder durch eine angebrachte Schleusse nach Verlangen gemässigt werden könne.

2. Die Wasserräder, deren man sich gewöhnlich bedient Maschinen zu treiben, werden in Ansehung der Art wie das Wasser auf dieselbe fällt in zwei Hauptgattungen nemlich in die Ober und Unterschlächtige abgeteilet. Oberschlächtige werden überhaupt alle diejenige genent, auf welche das Wasser ganz von oben wie bei A; oder wenigsten gegen die Seite ungefähr in der gleichen Höhe des Mittelpunkts des Welbaumes wie bei B in einer Rinne herabfällt, und sich noch einige Zeit zwischen den Schaufeln mit fort bewegt, folglich

Fig. 157.
u. 158.

lich nicht allein durch den Stoss, sondern auch zum Teil noch unter seiner Schwere in das Rad wirket. Ferner unterscheidet man die überschlächtigen Räder noch in

Fig. 157. geräblaufende wie bei A, und in gekürzte wie bei B zu sehen.

Fig. 158. Man sieht leicht und selbstem, daß die überschlächtigen Wasserräder ein hohes Gefäl erfordert. Unterschlächtige Wasserräder sind jene, an welchen

Fig. 159. der Stoß oder Aufschlag des Wassers an die untersten Schaufeln angebracht wird, wie bei C zu sehen.

Die Wasserräder werden auch nach ihrer Bauart

Fig. 161. noch unterschieden, und zwar erstlich in Straubrädern wie XY, die nur aus einem Kranz bestehen, auf dessen äusserm Umkreis die Schaufeln nach der Richtung der Räder eingestekt werden, und sind die einfachsten

Fig. 157. und leichtesten; in Kropf oder Bottichrädern: deren Schaufeln schief auf dem Umkreis stehen, und eigentlich aus zwei Flächen ab und zu zusammengesetzt, und auf allen Seiten ausser auf der äussern geschlossen sind, sie werden so gemacht, damit das Wasser länger in den Schaufeln verbleiben, und durch seine Schwere mitwirken sol; sind folglich nur als Überschlächtige zu ge-

Fig. 160. brauchen; in einem Kranze
In einer gewisse
schen welchen d
Diese Art ist g
den, braucht
auch mehr Kra
Stäberrädern
weiter von ein
feln haben, me
wegen noch me
sie auch nur zu
Umstände müsse

rädern man sich in besondern Fällen zu bedienen hat.

Ob

Obwohl es einigen scheint, daß man in gewissen Fällen, nemlich wenn man zwar ein hohes Gefäl aber wenig Wasser hat, die oberflächlichen Räder mit mehreren Vorteil, als die unterschlächtigen anwenden könne, so läßt sich doch das Gegentheil sehr leicht behaupten; denn wenn man den Wasserbehälter so einrichtet, daß das Wasser anstatt oben auf das Rad zu fallen, unten gegen die unterste Schaufel ausfließen muß, so gewinnt man Augenscheinlich einen größern Fal, das Wasser erhält mehr Geschwindigkeit, und über also einen größern Stoß aus, als wenn es oben auf das Rad gefallen wäre; da man nun aus dieser Ursache wirklich weniger Aufschlagwasser als im andern Falle braucht, so darf man die Oefnung des untern Ausflusses nur kleiner machen, oder die Schluße nicht so hoch stehen, um mit dem Wasser anzukommen. Man übergethet mit Stillschweigen, daß beiden oberflächlichen Rädern viel mehr Wasser umsonst verströhet wird.

3. Damit man einem Wasserrade die vorteilhafteste Anzahl Schaufeln gebe, so hat man sie soweit auseinander zu setz
welche eben se
het, ihren sen
nächstfolgende
de das Wasser
Winkel, den
mit einander u
bestimmen, u
wird, wenn sowohl der Radius des Rades als die Höhe der Schaufel vorher bekannt, oder angenommen ist. Mehrere Schaufeln anzubringen, wäre nicht allein überflüssig sondern auch nachtheilig.

haufel AB, Fig. 159.

Wassers ste
anfängt, die
wässersten En
rund also der
st der Welle
sonometrie zu
finden sein

384 V. Absch. III. Hauptst. v. d. Stose d. Wass.

4. Die Schaufelfläche solle allezeit um etwas höher als die Durchschnittsfläche des darauffallenden Wassers sein, damit weniger Wasser darneben verloren gehe.

5. Den unterschlächtigen und gestürzten Rädern hat man zwischen ihren Schaufeln, den Seitenwänden und dem Boden des Gerinnes so wenig Spielraum zu lassen, als möglich; damit dadurch das wenigste Wasser ohne Wirkung verloren gehe.

6. Dasjenige Wasser, was bereits gegen die Schaufeln gestossen hat, muß unter dem Rad mit grösserer Geschwindigkeit hinweg fließen können, als das Rad selbst hat.

7. Die Geschwindigkeit des Wassers, so ein gewöhnliches Rad umtreiben mus, sol zum wenigsten in 1 Sekunde 3 Schuh betragen.

8. Die Wasserräder sol man allezeit so nahe an die Schleusse oder an das Schußbret stellen, als thuntlich ist; damit es den Stoß gleich beiden Zuschluß empfangen.

9. In der Berechnung des Verhältnisses der an dem Wasserrad angebrachten Kraft zu derjenigen Last, welche durch die Maschine bewegt werden sol, hat man den Radius des Rades allezeit von dem Mittelpunkt der Welle bis in den Mittelpunkt der Schaufelfläche zu nehmen.

Fig. 158. 10. Wenn man sich eines gestürzten Rades bedient, so wirkt das Wasser durch seine Schwere mit einem grössern Nachdruck, wenn man den Boden des Gerinnes nach dem äussern Umkreis des Rades von F an bis zum untersten Punkt C krümmt, weil es sich dadurch länger in den Schaufeln aufhalten mus.

Vier:



Viertes Hauptstück.

Von einigen Wassermaschinen überhaupt.

Erklärung.

§. 481. Das Wort Wassermaschine kan eigentlich in zweenerlei Verstand genommen werden; nehmlich einmal wenn es eine Maschine bedeutet, welche zwar durch das Wasser bewegt wird, aber sonst verschiedene Einrichtungen machen kan; und das anderemal wenn sie selbst Wasser beweget, oder in die Höhe treibt, aber entweder ebenfalls durch das Wasser, oder durch andere Kräften z. B. von Menschen, Thieren, Wind u. m. d. g. in Bewegung gesetzt wird.

Es wird hier nur überhaupt von tenen Maschinen, welche durch Wasserräder getrieben werden, Meldung geschehen, weil es der Absicht dieses Werkes zu wider, und zu weitläufig sein würde mehrere anzuführen, oder umständlicher zu erklären.

Von der Unordnung einer Maschine, welche eine Last im Kreise oder um ihre Achse bewegen sol.

§. 482. Da ein Wasserrad, durch welches die Maschine getrieben werden sol, ohnehin im Kreise oder um seine Achse gedrahet wird, so ist auch keine Schwierigkeit eine gleiche Bewegung der Last, oder vielmehr demjenigen Teil der Maschine zu verschaffen, an welchen die Last oder der Widerstand angebracht wird. Es kommt dabei nur darauf an, wohl zu überlegen, was

die Last oder der Widerstand, der überwunden werden soll, für ein Verhältniß gegen die am Wasserrad vorhandenen Kraft hat; ferner welche Geschwindigkeit die Kraft besißet, und mit welcher die Last bewegt werden solle, um die Teile der Maschine darnach einrichten zu können. In dieser Absicht merke man also überhaupt folgendes:

- I. Ist die Last oder der Widerstand, den die Maschine zu überwinden hat, grösser als die Kraft, welche das Wasserrad bewegt, so siehet man wohl, daß man durch die Anordnung der Maschine an der Kraft zu gewinnen suchen mus; thut man aber dieses, so wird die Last alsdenn sich um so langsamer als die Kraft bewegen, weil man unmöglich zugleich sowohl an der Kraft als Geschwindigkeit gewinnen kan. Derowegen ordne man an dem Welbaum AB des Wasserrades IR ein Getrieb CD an, welches man in ein Zahnrad CE greifen läßt, an dessen Welle FG, wenn dieses allein schon hinlänglich ist, alsdenn die Last angebracht wird. Wäre aber dieses Zahnrad noch nicht zureichend, die Kraft soviel zu vermehren, als die Last, oder der Widerstand erfordert, und die Umstände erlaubten auch nicht dasselbe grösser anzunehmen, so würde man an dessen Welle noch ein Getrieb H, welches wieder in ein anderes Zahnrad greifen müßte, anbringen müssen u. s. w. Doch sind dergleichen Vermehrungen der Getriebe und Räder ohne Noth niemals zu machen, weil sie nur die Unkosten der Maschine, und die Reibungen ihrer Teile vermehren. Die Grösse der Räder der Getriebe und Räder werden nach den oben von Rädermaschinen gegebenen Gründen bestimmt; und es verstehet sich von selbst, daß man sich wenn die Achse der Last horizontal wie HG ist, der Sternräder CE, und wenn sie vertikal

Fig. 160.
u. 162.

Von einigen Wassermaschinen überhaupt. 387

kal oder stehend wie DF, der Rammräder HI bedienen Fig. 161. müsse.

2. Ist aber die Last oder der Widerstand geringer als die Kraft am Wasserrad, so kan man an die Welle desselben NO gleich ein Zahnrad IH oder CE anbringen, welches man in ein Getriebe D oder E einer andern Welle DF oder EP eingreifen läßt, an welche man hernach die Last oder den Widerstand anbringen kan. Fig. 161. u. 162.

3. Wäre durch die Umstände bestimmt, wie oft die Last sich in einer gewissen Zeit um ihre Achse bewegen sol, so hätte man sowohl die Radien der Räder und Getrieben als die Anzahl ihrer Zähnen nach den bereits oben gegebenen Gründen einzurichten. Ubrigens ist für sich klar, daß man, wenn die Last geschwinder als das Wasserrad umlaufen sol, an dessen Welle ein Zahnrad, im Gegensalle aber ein Getrieb anzuwenden hätte.

Dergleichen Bewegungen der Last um ihre Achse werden hauptsächlich bei Mühlen, Schleifwerken und Bohrmaschinen u. ä. m. erfordert; da nemlich bei den erstern die Mühl und Schleifsteine, bei den andern aber die Bohrer, oder der Körper, so gebohret werden sol, sich selbst um seine Achse drehen mus. Ubrigens ist es gar nicht schwer, an einer solchen Maschine die angewendte Kraft und Last nach den oben gegebenen Gründen gehörig zu proportioniren, wenn es nur zu thun ist die Last, so man dem Gewicht nach ausdrücken kan, zu bewegen; ist aber nebst der Last auch noch ein besonderer Widerstand vorhanden, der von der Kraft überwunden werden mus, wie z. B. der Widerstand, den das Getraid dem

Mühlstein machet, oder den der Bohrer einer Bohrmaschine an dem Körper findet, der gebohret werden sol, so wird es in manchen Fällen ziemlich schwer, die Grösse desselben dem Gewicht nach richtig auszudrücken, um die Kraft darnach zu proportioniren, gemeiniglich mus man in dergleichen Fällen Erfahrungen zu Hülfe nehmen.

Von der Anordnung einer Maschine, welche eine Last durch eine sogenannte Daumwelle bewegen sol.

Fig. 163. §. 483. I. Wenn eine Last öfters nach einander nur auf eine kleine Höhe gehoben werden sol, und dieselbe durch ihre eigene Schwere an ihre vorige Stelle zurückfallen kan; wie es sich z. B. an Hammerwerken und Pulverstämpfen ereignet, so bedient man sich gemeiniglich der sogenannten Daumwellen. Es ist aber dieselbe nichts anders als eine gewöhnliche Welle, an welcher so viele Daumen ABC eingesetzt werden, so oft die Last bei einer Umdrähung der Welle gehoben werden, und wieder niederfallen sol. Diese Daumen bekommen beinahe die Gestalt der gewöhnlich Zähnen eines Rades, nur daß sie, nach dem nemlich die Last höher gehoben werden sol, auch etwas länger, und in gehöriger Stärke gemacht werden. Diese Daumen drücken bei Hammerwerken das kürzere Ende des Hammerstihles soweit nieder, bis sie von demselben abglitschen, und es verlassen müssen, eben damals aber fällt der bis in F gehobene Hammer auf seinen Anboß D nieder, und verrichtet bei jeder herumdrähung der Welle so viele Streiche, als Daumen an der Welle auf einen Umkreise stehen. Bei den Hammerwerken werden die Daumen gemeiniglich unmittelbar an die Welle des Wasserrades selbst angebracht, und bei Eisen-

fengustwerten werden die grossen Blasbälde oft auch durch Daumenwellen bewegt.

2. Wenn man die Daumwelle zu Pulverstämpfen anwendet, so wird ieder Stämpfer an der Seite mit einer sogenannten Heblatte DE versehen, die von dem Fig. 164. eben in der horizontalen Stellung sich befindenden Daumen BC ergrifen, und soweit in die Höhe gehoben wird, bis sie, wenn sie nehmlich in F gekommen ist, von demselben wieder abglitschet, wornach der Stämpfer wieder in das Grubenloch I zurückfallet, und seinen Stoß daselbst ausübet. Damit ein Stämpfer bei ieder Herumdrähung der Welle zweimal würke, so pflegt man dem Daumen BC einen andern LN gegenüber auf dem nehmlichen Umkreis der Welle einzusetzen, oder das Stückholz NC ganz durch die Welle gehen zu lassen.

Weil aber in dergleichen Stampfwerken allezeit mehrere Stämpfer in einer Reihe gestellet werden, so wird an der Welle einem ieder Stämpfer gegen über ein Umkreis gezeichnet, und die Daumen werden auf denselben dergestalt nach einander hingesezt, daß, wenn der erste die Heblatte des ersten Stämpfers bis in F gehoben hat, und eben bereit ist sie wieder zu verlasen, der zweite die Heblatte des zweiten Stämpfers eben damals anfangt zu erheben, und so von dem dritten, vierten und allen übrigen Stämpfern. Durch diese Einrichtung kommen die Daumen längst der Welle auf ihren verschiedenen Umkreisen in einer Spirallinie zu stehen.

Es ist zwar nicht zu laugnen, daß die Kraft von Anfange der Erhebung eines Stämpfers bis er in seine höchste Höhe DF komt, ungleich würke; weil der

Hebelarm, an welchen eigentlich die Last des Stämpfers angebracht ist, anfänglich $= AC$, auf die letzte aber nur $= AB$ ist. Aus dieser Ursache geben einige den Daumen an der Fläche, mit der sie die Heblatten berühren, eine krummlinigte Gestalt, wie bei O zu sehen. Allein diese Ungleichheit der Wirkung wird durch die mehrere angebrachten Stämpfer, wenn einer nach dem andern gehoben wird, wieder hinlänglich ersetzt.

Eine umständliche Beschreibung und Berechnung der Kraft und Last sowohl als der dabei vorkommenden Reibungen würde hier zu weitläufig sein; wer aber von solchen Pulverstämpfern eine ausführliche Nachricht verlangt, kan sie in Belidors Hydraulik finden.

Von der Bewegung einer Last durch die Kurbel oder dem krummen Zapfen.

Fig. 165. §. 484. Wenn eine Last z. B. durch die Bewegung eines Wasserrades in gerader Linie wechselweise entweder auf und nieder, oder hin und her bewegt werden sol, so wird gemeiniglich eine Kurbel, oder ein so genannter krummer Zapfen AB an das Ende einer Welle angebracht, der durch die Herumdrähung mit derselben die angebrachte Last Q von seiner untersten Stellung AD bis zur obersten AH hinauf, und von derselben wieder bis zur ersten herab bewegt; oder die Last bei einer Herumdrähung um den doppelten Radius AB, d. i. um $2AB = DH$ auf und nieder bringet. Daß aber das Verhältniß der Kraft zur Last in allen Stellungen eines solchen krummen Zapfens nicht immer einerlei bleibt, folglich daß die Kraft ungleich arbeiten mus, erhellet aus folgenden: wenn man sehet, es seie AI der Radius eines durch die Kraft P nach der Richtung PI bewegten Wasserrades, an dessen Welle der krumme Zapfen AB mit der Last Q angebracht wäre
der

der eben sich in der horizontalen Stellung befände, mithin die Richtung BQ der Last darauf perpendicular stünde; so ist klar, daß der Abstand der Last von dem Ruhepunkt $A = AB$, und der Abstand der Kraft von eben diesem Punkt $= AI$, und folglich in solchen Falle $P : Q = AB : AI$ seie, §. 227.

Nachdem aber der krumme Zapfen von B nach C gegangen sein wird, so ist seine Stellung AC, der Abstand der Last von dem Ruhepunkt A ist nur $= AE$, und der Abstand AI der Kraft bleibt wie zuvor,

also ist: $P : Q = AE : AI$ §. 227.

Ist die Stellung des krummen Zapfens AG, so ist AT der Abstand der Last, folglich

$$P : Q = AT : AI,$$

Wenn endlich der krumme Zapfen in die Stellung AH gekommen ist, so ist der Abstand der Last von dem Ruhepunkt $= 0$, oder unendlich klein, folglich wird die Kraft damals nichts zu arbeiten haben. So wie aber derselbe diese Stellung wieder zu verlassen anfängt, und mehr gegen L gehet, so erhält die Last eine größere Geschwindigkeit im niedersteigen, dieselbe wird in der Stellung MA am größten sein, und wieder abnehmen, so wie sie von M weiter nach D kommt, folglich wird die Kraft, indem der krumme Zapfen in den halben Birkel HMD gehet, nichts zu arbeiten haben; so bald er sich aber wieder von D gegen B bewegt, so wird der Abstand der Last von dem Ruhepunkt wieder größer, und zwar in der Stellung AN gleich AF, und in AO gleich AE sein, folglich wird im ersten Falle $P : Q = AF : AI$,

und im andern $P : Q = AE : AI$ werden. Daraus ist also klar zu ersehen, daß die Kraft damals die größte Arbeit hat, wenn der krumme Zapfen die horizontale Stellung AB einnimmt, daß solche immer geringer

wird, je weiter sich derselbe von dieser Stellung befindet, daß endlich die Kraft gar keinen Widerstand mehr leidet, so lang der krumme Zapfen sich in den halben Birkel HMD herum bewegt.

Der krumme Zapfen wird seiner ungleichen Bewegung ungeachtet bei verschiedenen Maschinen z. B. bei Sägemühlen, zur Bewegung der Säge, bei Pumpwerken zur Bewegung der Kolbenstangen und a. d. g. angewendet. Bei den letztern suchet man der ungleichen Bewegung dadurch auszuweichen, daß man mehrere Kolben nebeneinander anbringt, und den krummen Zapfen so vielfach machet, als Kolben vorhanden sind; damit aber ihre Bewegung wechselseitig geschehen kan, so machet man bei dem zweifachen die zween Radien

Fig. 166. AB und CD einander entgegenstehend, oder in einer Fläche; bei dem dreifachen, daß sie untereinander gleich

Fig. 167. the Winkel BAC, CAD und DAB $= 120^\circ$ machen; und bei dem vierfachen daß allezeit zween wie AC und

Fig. 168. AE einander gegen überstehen, und mit den andern zween AB und AD rechte Winkel machen. Nach einiger Überlegung siehet man leicht ein, daß die dreifachen die ungleiche Bewegung am aller meisten vermindern, derowegen sind sie auch die gebräuchlichsten. Noch eine wesentliche Ungleichheit ereignet sich bei der Bewegung eines krummen Zapfens, wenn die Last an einer steifen Stange an demselben hanget, die ziemlich kurz ist; denn alsdenn geschihet es, daß die Kraft bei ieder Umdrähung zweimal senkrecht, und zweimal schief würket, welches bei Pump und Druckwerken öfters ziemliche Ungelegenheit, und in den Stifeln eine beträchtliche Reibung verursacht.

Um die Ungleichheiten der Bewegung des krummen Zapfens zu vermeiden, hat man nebst andern folgende Mittel erdacht, nemlich man machet die Stange, woran

an die Last befindlich ist, in der Gestalt einer Rahme ABCD, und giebt ihr innenher zu beiden Seiten Zähne, Fig. 169. in welche ein an einer Welle befindliches Getrieb L, welches nur auf dem halben Umkreis mit Zähnen versehen ist, eingreift; sobald nun dieses Getrieb entweder durch die Kurbel LE, oder durch ein Rad umgedröhrt wird, so greifen die Zähne desselben an der Seite AB in die Zähne der Rahme, und ziehen die Stange so lange in die Höhe, bis der letzte Zahn des Getriebes in den letzten Zahn der Rahme an dieser Seite eingegriffen, und ganz oben verlassen hat. In dem nehmlichen Augenblick als dieses geschieht, ist auch der erste Zahn des Getriebes bis an dem untersten Zahne der Seite CD gekommen, damit er und die folgenden nun in die Zähne der Rahme auf dieser Seite eingreifen, und die Stange wieder niederdrücken können. u. s. w.

Auf eine ähnliche Art kan man auch mit einem solchen Getriebe zwei Kolbenstangen AB und CD bewegen, die an ihren Seiten mit Zähnen versehen sind; nur müssen beide mit Gewichten E und F versehen werden, damit AB nachdem sie gehoben worden, wieder niedergedrückt, CD aber, nach dem sie niedergedrückt worden, durch das Gewicht F wieder gehoben werden könne. Wobei aber die Ungelegenheit ist, daß diese Gewichte von der Kraft stäts mit bewegt werden müssen.

Ein sehr gutes Hülfsmittel wider die Ungleichheit des krummen Zapfens sind die sogenannten elliptischen Scheiben, deren gemeiniglich drei dergestalt an eine Welle angebracht werden, daß ihre grössere Achsen AB, EC, FD die doppelten Radien eines regelmässigen Sechsecks wie wohl in verschiedenen Flächen hintereinander liegend vorstellen, auf der Länge der Welle aber soweit von einander abstehen, als die Entfernung

der Kolbenstangen und die Stifel des Pumpwerkes erfordern. Über eine jede solche elliptische Scheibe liegt das Ende R eines langen Wagebalkens RO, welches zur Verminderung der Reibung mit einer Rolle S versehen wird, die eben auf die Kante der elliptischen Scheibe auftrifft. N ist der Ruhepunkt des Wagebalkens, auf welchem er sich bewegen kan. An dem einen Ende O eines jeden Wagebalkens wird die Kolbenstange OM angebracht. So oft sich nun die Welle im viertel Umkreis herumdrähet, so steigt das Ende R eines jeden Wagebalkens einmal um dem Unterschied der grossen und kleinen halben Achse der elliptischen Scheibe, da ist: um IB — IL in die Höhe, indeme hingegen das andere Ende O niedersinkt, und den Kolben in den Stifel drückt, so wie alsdenn die Welle das zwote Viertel des Umkreises beschreibet, so sinket das Ende R des Balkens durch seine eigene Schwere wiederum IB — IL nieder, und das andere O geht in die Höhe; und bewirkt solchergestalt den Kolben in einen halben Umtrieb der Welle einmal und in einem Ganzen zweimal auf und nieder; welches schon ein wesentlicher Vorzug gegen den krummen Zapfen ist, als der bei einer ganzen Umdrähung nur einmal würden kan.

Durch die Stellung der Scheiben in ein Sechseck, geschihet es, daß die Wagebalken sich wechselweise bewegen, damit die Arbeit der Kraft gleicher ausgeteilet wird. Überhaupt hat diese Art Maschinen, zu was sie demnach auch immer angewendet werden, den Vortheil, daß sie sehr sanft und ohne allen Zucken bewegt wird.

Fig. 172. Die 172te fig. zeigt wie die Welle nach der Länge, und die elliptischen Scheiben nach der Stiern und in ihrer Entfernung von einander anzusehen sind.

Von

Von den gebräuchlichsten Ventilen und Kolben der Wasserpumpen.

§. 485. 1. Wenn das Wasser in geschlossenen Röhren in die Höhe gehoben werden sol, so ist erforderlich, daß man seine Gemeinschaft in gewissen Orten in den Röhren wechselweise und nach Erfodernis ganz unterbrechen, und wieder herstellen kan; und dazu bedient man sich der sogenannten Ventilen. Unter den verschiedenen Arten derselben, die bisher erdacht worden, sind die sogenannten Muschel und Klappenventil, welche in der 173 und 174ten Figur im Grundris und Durchschnit vorgestellt werden, die gebräuchlichsten und nützlichsten. Das Muschelventil bestehet aus einem Stück Messing AB, welches zwischen die Zusammensüfung zweier Röhren angebracht wird, und in der Mitte mit einer runden und etwas konisch zulauffenden Oefnung ab versehen ist. In diese Oefnung wird eine messingene Muschel C wohl eingerieben, die untenher in der Mitte einen Stengel Cd hat, der durch den Luer über die Oefnung angebrachten Steeg ef gehet, und untenher mit einem Knöpfgen versehen ist, damit die Muschel sich im auf und niedergehen stäts in der geraden Richtung erhalte, und sich nicht weiter entferne, als nöthig ist. Die Oefnung ab macht man so groß, damit das Wasser so ungezwungen als möglich ist, durchgehen könne; in welcher Absicht man den Röhren in diesen Stellen öfters einen Bauch giebt. Diese Art von Ventilen wird gemeiniglich nur bei gerade stehenden Röhren gebraucht.

Fig. 173.
u. 174.

Die zwote Art oder das Klappenventil bestehet in folgenden: es wird nemlich auf dem breiten und überstehenden Rande der untern Röhre A ein breiter Ring von starken Leder gelegt, dessen äußerer Durchmesser CD

CD mit dem des Randes der Röhre gleich, der innere aber etwas grösser als die Oefnung der Röhre ist, und davon noch ein Stück wie abdc ausgeschnitten wird. In diesen ausgeschnittenen Teil wird ein gleiches Stück Leder abdxhc eingepasset, und unter den runden Teil dieses Leders legt man eine messingene Scheibe no, wie im Durchschnit zu sehen, deren Durchmesser etwas kleiner als der der Oefnung der Röhre ist; obenher aber eine andere mv fast von gleichem Durchmesser mit dem runden Leder, und schraubet sie mit der durch die Mitte gehenden Schraube rs fest zusammen. Wenn man nun dieses Stück Leder auf die untere Röhre genau in den ausgeschnittenen Teil des ledernen Ringes bdfeca leget, und die obere Röhre TV fest darauf schraubet, so giebt das runde Stück die Klappe ab, wobei das vorstehende Leder bei cd die Dienste eines Gewerbes verrichtet, damit sie frei auf und zu fallen kan. Die Oefnung der untern Röhre wird bei diesem Ventil wie bei dem vorigen soweit gelassen, damit das Wasser mit den wenigsten Zwange und in so grosser Menge durchgehen kan, als möglich ist; in welcher Absicht man den Röhren daselbst gerne eine Erweiterung TV giebt. Diese Art von Ventilen kan besonders sowohl bei horizontal als schief liegenden Röhren

Fig. 175. wie bei CD zu sehen, mit Vorteil gebraucht werden.

Um das Wasser in den Röhren der Pumpwerke in Bewegung zu bringen, und entweder zu drücken, oder zu heben, so bedient man sich der sogenannten Kolben, sie bestehen gewöhnlich aus nichts andern, als aus mehreren über einander zusammengeschraubten ledernen Ring-

Fig. 176. platten wie CD im Grund, und AB im Durchschnit sehen läßt, und die alle in die Röhre, in welcher der Kolbe auf und ab spielen sol, genau passen müssen. Das Stück Röhre, worinnen der Kolbe spielt, wird der

Sti.

Stiefel genent, und mus vollkommen gerade, gleichweit, und der Dure wegen von Metal sein. Der Kolbe wird obenher an eine steife eiserne Stange befestiget, der man bei F öfters ein Glied giebt. Mitteltst dieser Stange wird nun der Kolbe auf und nieder bewegt, daher sie auch die Kolbenstange heist.

Überhaupt sind zwei Gattungen von Kolben die gebräuchlichsten, nemlich der Druckkolbe wie AB, der ganz Massiv ist, und der Hebkolbe wie CD, welcher in der Mitte eine Höhlung HE hat, die obenher mit einem Ventil E versehen ist, um sich nach Erfordernis schliessen und öfnen zu können. Öfters wird der Cylinder des Kolbens AB anstatt von Leder ganz von Metal gemacht, und genau in den Stiefel eingerieben. Diese metallenen Kolben haben besonders ihren Nutzen bei Feuersprizen; weil das Leder sehr eintrocknet, wenn es nicht beständig naß erhalten wird.

Fig. 176.
u. 177.

Von den Heb und Druckwerken.

§. 486. Wenn die Umstände erlauben, das Wasser in der nemlichen Röhre in welcher der Kolbe angebracht ist, senkrecht bis zu seinen Ausguß in die Höhe zu heben, wie sich dieses meistens in den gemeinen Brunnen ereignet, so bedient man sich fast gewöhnlich der sogenannten Hebpumpen; die überhaupt auf folgende Art eingerichtet sind: erstlich wird die unterste Röhre CB dergestalt in den Wasserbehälter gesetzt, daß ihre untere Oefnung stäts unter der Oberfläche AB des Wassers ist. Niemals über 32 Schuh sondern allezeit unter dieser Höhe wird ein Ventil CD zwischen dem Anschluß zweier Röhren eingesetzt; und alle unter diesem Ventil befindliche Röhren, sie mögen demnach von Holz oder Metal sein, werden insgemein die Saugröhren genent. In die nächst über dieses Ventil zu stehen

Fig. 178.

stehen kommende Röhre CR wird ein metallener Stiefel YP eingesetzt, in welchen ein Hebkolbe G auf und nieder spielt, dessen Stange GI ganz durch alle Röhren hinausgeführt wird, um sie oben entweder durch einen gemeinen Hebel, oder krummen Zapfen u. d. g. in Bewegung zu setzen. Endlich wird oben an der Seite der obersten Röhre das Ausgußloch H in der verlangten Höhe angebracht. Wenn nun der Kolbe das erstemal von C nach P in die Höhe gezogen wird, so schließt sich sein Ventil G; weil aber durch die Entfernung des Kolbens von dem untern Ventil zwischen ihm und demselben die Luft sehr verdünnet wird, oder gleichsam ein luftleerer Raum entsteht, so drückt die Schwere des Dunstkreises das Wasser aus den unten befindlichen Behälter durch die Saugröhren und durch das untere Ventil L in dem zwischen dem Kolben und demselben entstandenen leeren Raume. Sobald nun der Kolbe seine größte Höhe in P erreicht hat, und anfangt wieder nieder zu sinken, so schließt sich das Ventil L, hingegen öffnet sich das Kolbenventil G, und läßt das zwischen beiden eingebrungene Wasser über den Kolben hinaufsteigen. Ist der Kolbe solchergestalt bis ans untere Ventil niedergesunken, und fängt an abermal zu steigen, so schließt sich das Ventil G von neuen, L aber öffnet sich, und das Wasser dringet abermal durch dasselbe, und eilet dem Kolben nach, indem derselbe das bereits ober ihm befindliche in die Höhe hebt; bis endlich soviel Wasser über den Kolben gebrungen ist, daß es bei ieder Hebung desselben durch den Ausguß H ausfließen mus.

Erlauben es die Umstände nicht, das Wasser senkrecht über den unten befindlichen Wasserbehälter in die Höhe zu treiben, oder man ist genöthiget dasselbe durch Krümmungen oder in einen ganz andern Orte, als wo die

Kol-

Kolben angebracht werden können, in die Höhe zu schaffen, so gebraucht man sich des sogenannten Druckwerkes, welches zwar öfters verschiedene Einrichtungen erhält, die aber in der Hauptsache alle dahin abzielen, daß das Wasser bei der Erhebung des Druckkolbens IK durch das untere Ventil F durch den Druck des Dampfkreises auf das in dem Wasserbehälter befindliche Wasser in dem Stiefel dem Kolben I nachteile, und denselben anfülle, bei der folgenden Niederdrückung des Kolbens aber sich das Ventil F schliesse, das Seitenventil G aber öfne, und das in dem Stiefel befindliche Wasser durch dasselbe in die Steigröhre GH dringe, und daß dieses bei jedem Druck des Kolbens wiederhollet werde. Gemeiniglich werden zween, drei oder mehrere Druckkolben und Stiefel neben einander und dergestalt angebracht, daß sie wechselweise ihre Verrichtung machen, theils um die ungleiche Arbeit der Kraft, als welche im aufziehen der Kolben viel geringer als im niederdrücken ist, gleichförmiger zu machen, theils auch um mehrer Wasser zu gewinnen. Die Steigröhren GH werden von mehrern Stiefeln über ihren Seitenventilen G meistens in eine allein zusammengeführt, und gemeiniglich der Unkosten wegen in ihrem innern Durchmesser etwas kleiner als die Stiefel selbst gemacht, doch dürfen sie auch nicht zu enge sein, weil in solchen Falle das Wasser in denselben eine gar zu grosse Geschwindigkeit annehmen mus, und deswegen auch eine grössere Kraft zum drücken erfordert wird.

Fig. 179.

Die grossen Feuersprißen sind an sich nichts anderes als Druckwerke, welche gewöhnlich aus zween Stiefeln AB und CD bestehen, im welchen die zween Kolben EF und GH durch eine grosse Hebelstange IL wechselweise bewegt werden. T und S sind die zwei Saugventile, durch welche das Wasser aus dem Behälter in die

Fig. 180.

die Stiefel dringet, und P und R die zwei Seitenventile, durch die es entweder in eine gemeinschaftliche Steigröhre, oder aber wie hier in einen zwischen den zween Stiefeln angebrachten sogenannten Windkessel MN gedrückt wird. Dieser Windkessel ist oben bei M mit einem Gut auf das genaueste geschlossen, damit er Luft hält, unten bei N aber mit einem Loch versehen, an welches entweder die Steigröhre, oder ein lederner Schlauch NO angeschraubet wird, um solchen hinführen zu können, wo es nöthig ist. Durch diesen Windkessel erhält man den Vorteil, daß das Wasser durch die Mündung O nicht Stoßweis, wie bei den Spritzen, welche keinen Windkessel haben, geschiet, sondern ununterbrochen ausgesprißt werde; denn da durch die Seitenventile P und R mehr Wasser in den Kessel dringet, als durch die Mündung O ausgesprißt wird, so häuffet sich dasselbe in ihm; eben dadurch aber wird die darin befindliche Luft gewaltig zusammengedrückt, welche alsdenn das Wasser mit einer stets gleichbleibenden Kraft durch die Oefnung N und O ununterbrochen hinaustreibt.

Um endlich noch von der Art eine kurze Erinnerung zu machen, nach welcher die Last oder der Widerstand, welchen das Wasser gegen die Kolben oder der bewegendenden Kraft sowohl bei Hebwerken als Druckwerken machet, berechnet wird, so hat man überhaupt zu merken, daß die Last des zu hebenden Wassers bei einem Hebwerke dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche die Grundfläche des Kolbens zur Grundfläche, die Höhe des ober dem Kolben befindlichen Wassers aber zur Höhe hat. Über dieses, da der Kolbe, wenn er in die Höhe gezogen wird, nebst dem, daß er das obere Wasser hebet, das untere zugleich sauget, so wird dadurch noch eine besondere Last oder Widerstand verursacht, die man füglich für das

Ge-

Von einigen Wassermaschinen überhaupt. 401

Gewicht einer Wassersäule annehmen kan, welche mit dem Kolben gleiche Grundfläche, und die Höhe des Kolbenzuges selbst zur Höhe hat. Daher man denn bei Hebwerken überhaupt das Gewicht der Wassersäule, welche von dem untern Ventil bis zum Ausguß reicht, und mit dem Kolben gleichen Durchmesser hat, für die zu bewegende Last annehmen kan.

Bei Druckwerken ist die zu bewegen vorhandene Last dem Gewicht einer Wassersäule gleich, die mit dem Kolben gleiche Grundfläche, und die Höhe des in der Steigröhre befindlichen Wassers über das untere Ventil zur Höhe hat §. 338 u. 339. wo man also sieht, daß es auf den Durchmesser der Steigröhre eben nicht ankomme, es wäre denn, daß er an derselben in Ansehung des Stiefels gar zu klein angenommen würde; als in welchem Falle alsdenn auch ein größerer Widerstand entsteht:

Wer mehrere und ausführlichere Nachrichten von Pumprwerken und andern zur Bewegung des Wassers dienlichen Maschinen verlangt, kan sich in Belidors Hydraulik, in Leopolds Theatrum Machinarum, u. m. a. Rathes erholen. Die vorgeschriebenen Gränzen erlauben uns nicht hierinnen weiter zu gehen, sondern verbinden uns vielmehr gegenwärtige Anfangsgründe hiemit zu be-
schließen:





Register

Der merkwürdigsten in diesem Teile
vorkommenden Sachen.

Artilleriehebzeug: dessen Beschreibung.	SS.
Ausfluß des Wassers durch Oeffnungen.	300
Aus zwei gleichen Oeffnungen zweier statts in gleicher Höhe vollen Gefäßen fließet in gleicher Zeit eine gleiche Menge Wasser.	418
Die Mengen des durch zwei gleiche Oeffnun- gen zweier ungleichhohen Gefäßen ver- halten sich in gleichen Zeiten wie die Geschwindigkeiten.	419
Und die Geschwindigkeiten wie die Qua- dratwurzeln der Höhen.	420
Folglich auch die Mengen wie die Qua- dratwurzeln der Höhen.	421
Wenn die Oeffnungen ungleich, die Hö- hen aber gleich, so sind die ausfließen- den Mengen wie die Oeffnungsflächen- inhalte.	422
Sind aber beide ungleich, so stehen die ausfließenden Mengen in zusammenge- setzter Verhältnis der Flächeninhalte der	



SS.

Deffnungen, und Quadratwurzeln der Höhen.	423
Die ausfliessenden Mengen Wassers aus einem Gefäße verhalten sich wie die Zeiten.	426
Die Zeiten in welchen sich zwei prismatische Gefäße von gleichen Höhen und Deffnungen ausleeren, verhalten sich wie ihre Grundflächen.	427
Wie ihr Verhältnis beschaffen, wenn die Deffnungen ungleich.	428
Wie wenn die Höhen ungleich.	429
Die Mengen Wassers, welche in gleichen auf einander folgenden Zeiten durch die Deffnung eines prismatischen Gefäßes auslaufen, stellen eine abnehmende Progression wie die ungeraden Zahlen vor.	431
Ein Gefäß, welches stäts gleich vol bleibt, verschwendet in einer Zeit doppelt soviel Wasser als ein gleiches in der nehmlichen Zeit, was keinen Zufluß hat.	432
Wie die Menge Wasser zu berechnen, welche in einer gegebenen Zeit aus einem Gefäß fließet.	433
Barometer oder toricellische Röhre	
Was er ist?	394
Das Quecksilber erhält sich in demselben auf einer mittlern Höhe von 28 Zollen.	395
Die Höhe desselben ist in einem nehmlichen Orte oft der Veränderung unterworfen.	397
Zeigt die Schwere des Dunstkreises an. . .	398



Wie ein Barometer zu füllen? nach.	35. 398
Ist in höhern Orten in gleicher Zeit niedriger als in niederen.	399
Kan also einiger Maaßen zu Höhenmessungen gebraucht werden.	400
Bewegung:	
Was sie ist?	3
Was eine gleichförmige?	12
Was eine beschleunigte, und gehemmte, und eine gleichförmig zu und abnehmende?	13
Was eine einfache, und eine zusammengesetzte?	14
Grundsätze der Bewegung überhaupt.	16, 17, 18
————— der zusammengesetzten gleichförmigen Bewegung.	31
Ein fallender Körper hat eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.	46
Ein senkrecht in die Höhe getriebener Körper erhält eine gleichförmig abnehmende Bewegung.	51
Daumenwelle: Beschreibung und Gebrauch derselben.	483
Druck der flüssigen Materien.	
Geschiehet gegen alle Seiten.	330
Die horizontale Grundfläche eines gleichweiten Gefäßes wird von der ganzen Schwere der darinn befindlichen flüssigen Materie gedrückt.	336
Die horizontale Grundfläche eines ungleichweiten Gefäßes wird nicht von der ganzen Schwere der enthaltenen flüssigen Materie, sondern nur von einem Volumen	



§§.

men derselben gedruckt, welches mit dem Gefäße gleiche Grundfläche, und mit der flüssigen Materie gleiche Höhe hat. . . .	338
Was für einen Druck die flüssigen Mate- rien gegen gerade stehende Seitenflächen ihrer Gefäßen ausüben?	340
Und was für einen gegen schiefe?	343
Druckwerk: Beschreibung seiner Beschaffen- heit.	486
Dunstkreis: Was er ist?	361
Seine Veränderung zeigt der Barometer an.	398
Durchschnittsfläche eines Flusses.	
Was darunter verstanden wird?	441
Durch jeden Durchschnitt eines beständigen Flusses läuft in gleichen Zeiten eine glei- che Menge Wasser.	442
Es mus also in einem engern Durchschnitt geschwinder als in einen weitem gehen.	443
In einem jeden Durchschnitt solte das untere Wasser geschwinder als das obere laufen, wenn keine Reibung wäre. . . .	444
Was die mittlere Geschwindigkeit des Was- sers in einem Durchschnitt sei?	445
Wie sie zu finden?	446
Wie alsdenn die Menge Wasser zu be- rechnen, welche durch einen Durchschnitt in einer gegebenen Zeit lauft?	447
Wie sich die Menge Wasser, welche durch die Durchschnitte zweener Flüsse laufet, verhalten?	448



§§.

Wie sich die Mengen Wasser, welche durch einen Durchschnitt eines Flusses vor und nach dem anlaufen desselben verhalten? .

454

Eigenthümliche Schwere der Materien. Tafel davon von verschiedenen Materien nach.

360

Was Körper von gleicher eigenthümlichen Schwere sind?

165

Wie das Verhältniß derselben an flüssigen und festen Materien zu finden?

358-359

Eingetauchte Körper, in flüssigen Materien.

Ein in einer flüssigen Materie liegender Körper drückt soviel von derselben aus ihren Platz, als sein eingetauchtes Volumen beträgt.

345

Was geschieht, wenn ein fester Körper entweder von gleicher, grösserer, oder kleinerer Schwere in eine flüssige Materie gelegt wird?

347

Wie viel er in diesen drei Fällen an seiner Schwere verliert?

348

Was für eine Kraft erfordert wird, ihm das Gewicht zu halten?

349

Zween Körper von gleichen Volumen aber von verschiedener Schwere, verlieren gleich viel von derselben; in Ansehung ihres ganzen Gewichts aber verliert der Leichtere mehr als der Schwerere. . . .

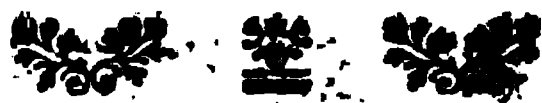
350

Die Volumens zweier Körper von einerlei Art verhalten sich wie die Teile der Schwere so sie in einer flüssigen Materie verlieren, Daher also der Kubifuss

halt



	SS.
halt eines sehr unregelmässigen Körpers durch Abwägen gefunden werden kan...	353.
Ein Körper verliert in einer schwerern flüs- sigen Materie mehrer an seiner Schwe- re, als in einer leichtern.	354
Wann die Schwere und Grösse des Vo- lumens eines Schiffes bekannt, wie die Tiefe seiner Eintauchung zu berechnen?	356
Wie von einem festen aus zweierley Ma- terien zusammengemischten Körper die Menge einer ieder zu finden?	360
Einfall und Abprellwinkel.	
Was sie sind?	136
Sind einander gleich.	139
Wie der Punkt zu finden, durch welchen ein Körper in Abprellen gehen muß?.	140
Elliptische Scheiben; deren Beschreibung, und Gebrauch anstatt den trummen Zap- fen.	
	484
Erhöhungs und Erniedrigungswinkel.	
Was sie sind?	74
Aus den gegebenen zwei Wurfsweiten und dem Erhöhungswinkel des einen den an- dern zu finden.	103
Wie der Erhöhungswinkel nach einem ge- thanen Probwurf für einen neuen Wurf nach einen erhobenen Gegenstand zu be- rechnen?	110
Detto, wie, wenn der Gegenstand unter dem Horizont liegt?	111



55.

Wie aus einem andern Grund? in welchen man eine horizontale Weite erreichen kann.	115. 116. 117
Detto wenn der Gegenstand über den Ho- rizont erhoben?	118
Detto wenn er unter den Horizont?	120
Wie der Erniedrigungswinkel für einen ge- senkten Wurf zu finden?	121

Fall der Körper.

Wie tief einer in der ersten Sekunde frei herabfallet?	48
Wenn die Zeit des Falles gegeben, wie die Höhe zu finden?	49
Und umgekehrt?	50
Alle Körper durchfallen in gleichen Zeiten, gleiche Räume.	53
Und erhalten in gleichen Zeiten gleiche Ge- schwindigkeiten.	54
Die in dem Falle erlangten Kräfte zweener Körper sind wie die Quadratwurzeln der Höhen ihres Falles.	55
Die Geschwindigkeit des Falles über eine schiefe Fläche hinab ist zunehmend.	61
Es verstehet sich von dem Falle über schie- fe Flächen alles was von dem senkrech- ten Falle gesagt wird.	62
Wie sich die Geschwindigkeiten des senk- rechten Falles und über eine schiefe Flä- che verhalten?	65, 66
Wie sich die Räume beim senkrechten Falle und über eine schiefe Fläche verhalten? ?	67, 68, 69, 70, 71

Folger.



	SS.
Feuerspritze. Beschreibung davon.	486
Flaschenscheibe.	
Was sie ist ?	235
Was eine unbewegliche und bewegliche ? .	236
Wie sich die Kraft zur Last an einer un- beweglichen verhält ?	238
Wie an einer beweglichen ?	242
Flaschenzug.	
Was einer ist ?	268
Wie sich an den verschiedenen Arten dersel- ben die Kraft zur Last verhält von. . 269 bis 276	
Fluß : was ein beständiger und unbeständiger ?	439
Flüssige Materien.	
Deren Oberfläche setzt sich mit dem Hori- zont parallel.	326
Sie steigen in verschiedenen Gemeinschaft habenden Abtheilungen eines Gefäßes, oder in eingetauchten Röhren auf gleiche Höhe.	329
Gemeinschaftliche Röhren.	
Eine flüssige Materie steigt in denselben auf gleiche Höhen, und haltet das Gleichgewicht.	331
Die Geschwindigkeit der in gemeinschaftli- chen Röhren bewegten flüssigen Mate- rien verhält sich wie umgekehrt die Grundflächen der Röhren.	333
Die Höhen zweier ungleich artigen flüssigen Materien in gemeinschaftlichen Röhren	



	SS.
verhalten sich umgekehrt wie ihre vers- chiedenen Schweren.	334
Und halten sich damals das Gleichgewicht, wenn ihre Höhen wie umgekehrt ihre Schweren sind.	335
Geschwindigkeit.	
Was sie ist?	II
Wie sie sich an zween gleichförmig beweg- ten Körpern verhalten?	21 bis 30
Wie bei zween Körpern die eine beschleunig- te Bewegung haben?	42, 43, 44, 47
Wie bei zween über eine schiefe Fläche bewegten Körpern?	61, 62, 65, 66, 67, 71
Wie bei dem Stosse eines unelastischen Körpers an einen andern?	127, 129, 130, 152
Wie bei dem Stosse elastischer Körper?	137, 143 145 bis 149, 153 bis 156
Die anfängliche, so von der Schwere her- kommt, ist in allen Körpern gleich.	6
Die Geschwindigkeiten der an einem Hebel angebrachten Kraft und Last, wenn sie im Gleichgewicht sind, stehen in um- gekehrter Verhältniß derselben.	219
Und eben so an andern Maschinen.	245, 275
Mittlere Geschwindigkeit des Wassers, was darunter verstanden wird?	445
Wie die Geschwindigkeit des Wassers durch ein Instrument zu finden?	446
Getrieb. Lanterne: was eines sei?	280, 281
Gewichter. Tafel der Verhältnisse verschie- dener Pfundgewichter nach.	360
Sammerwerk: Beschreibung eines solchen.	483



Hebel: Was einer sei?	SS. 171
Zween an einem Hebel gleichweit vom Ruhepunkt aufgehängene Körper von gleicher Masse stehen im Gleichgewicht. . .	174
Und wenn sie von gleicher Schwere sind, und in ungleicher Weite von dem Ruhepunkt aufgehängt werden, so verhalten sich die Bemühungen ihrer Schwere wie ihre Abstände von dem Ruhepunkt.	179
Zween an einen Hebel aufgehängene Körper von ungleichen Massen halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre Massen mit den Abständen von dem Ruhepunkt in verkehrter Verhältnis stehen.	181
Wie der Ruhepunkt an einem Hebel zu finden, an dem zween ungleich schwere Körper hängen, und sich das Gleichgewicht halten?	182
Wie der allgemeine Ruhepunkt an einem Hebel zu finden, an welchen mehrere schwere Körper hängen?	185
Was ein Hebel der ersten, zweiten und dritten Art sei?	211
Wenn die Kraft und Last an einem Hebel im Gleichgewicht sind, so stehen sie mit ihren Abständen von dem Ruhepunkt in verkehrter Verhältnis?	216
Oder auch umgekehrt wie ihre Bögen, die sie beschreiben.	219
Was bei der Berechnung zu thun, wenn der Hebel selbst eine Schwere hat? . . .	221



Was geschieht, wenn die Richtung der Kraft und Last schief auf den Hebel ist?	224
Man hat hauptsächlich die perpendicular Abstände der Richtungslinien der Kraft und Last von dem Ruhepunkt des Hebels zu betrachten.	227
Was die Wirkung von zusammengesetzten Hebeln sei?	265, 266
Hebel von Garuh: dessen Beschreibung. ..	302
Heber: was einer ist?	455, 460
Das Wasser kan in demselben nicht über 32 Sch. steigen.	459, 463
Die Oeffnung des Ausgusses mus niedriger, als die der Wasserfläche sein.	464
Hebpumpe: ihre Beschreibung.	486
Sygeometer: Zu was er dienet, und wie er auf verschiedene Art zu verfertigen? ..	406
Kanal: siehe Rinnsal.	
Keil: was er ist?	252
Wie sich die Kraft zum Widerstand verhalten muß, wenn er dienet zween Körper die nicht würflich zusammenhangen, von einander zu treiben?	253
Wie wenn er einen würflich zusammenhangenden Körper z. B. ein Stückholz spalten sol?	256
Kolbe: zu den Pumpwerken, dessen Beschreibung.	485



§§.

Körper: dessen allgemeine Eigenschaften und Arten.....	I • 7
Kraft: was eine ist?.....	8
Was eine Lebendige und Todte?.....	9
Kraft der Bewegung: was sie ist?.....	15
Wenn zween unelastische Körper sich nach einerlei Richtung bewegen, und der ers- te langsamer als der andere ist, und sich stossen, so ist die Summe ihrer Bewe- gungskräften nach dem Stosse gleich der Summe der Bewegungskräfte vor dem Stosse.....	123
Was hierinsals geschihet, wenn der eine Körper in der Ruhe ist?.....	124
Wenn zween Körper sich in entgegengesetz- ter Richtung stossen, so ist der Unter- schied ihrer Bewegungskräfte vor dem Stosse gleich der Summe derselben nach dem Stosse.....	125
Was folget, wenn ihre Massen gleich sind?	126
Wie die Bewegungskraft zu finden, die ein Körper bei dem Anstoß an einen an- dern verloren hat?.....	134
Wie sich die Kraft des senkrechten zu den schiefen Stoß verhält?.....	142
Wenn ein unelastischer Körper an einen an- dern langsamern nach eben der Rich- tung stösset, so ist die Kraft der Be- wegung nach dem Stosse eben so groß, als sie wäre, wenn der erste mit dem Unterschied der Geschwindigkeit von bei-	

den



	SS.
den vor dem Stosse an dem andern ruhend gestossen hätte.	150
Wenn zween unelastische Körper in entgegengesetzter Richtung an einander stossen, so ist die Kraft des Stosses eben so gross, als wenn der erste mit einer Geschwindigkeit, die der Summe der Geschwindigkeiten vor dem Stosse gleich ist, an den andern ruhend angestossen hätte.	152
Kraft der Trägheit: was sie ist? solche haben alle Körper.	4
Kraft treibende eines geworfenen Körpers. So oft sie verändert wird, beschreibt der geworfene Körper auch eine andere Parabol.	78
Die mit verschiedenen treibenden Kräften in einerlei Erhöhungswinkeln erreichten Wurfweiten verhalten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der treibenden Kräften.	91
Kranich: dessen Beschreibung.	301
Krummerzapfen: dessen Beschreibung und Verbesserung.	484
Lagerzapfen einer Welle: wie ihre Reibung in verschiedenen Fällen zu finden?	314, 315 316, 317
Luft: was sie ist?	361
Läßt sich zusammendrücken.	362, 364, 365
Und ausdehnen.	366, 367, 368, 369
Und zwar nach allen Seiten.	370, 371
	St



	§§.
Ist elastisch.....	372
Und schwer.	373·374·375
Ist in dem Dunstkreise, so wie sie höher über die Erdofläche sich befindet, auch dünner.....	376
Ein Körper wird von der Luft des Dunst- kreises auf allen Seiten gleichstark ge- drückt.....	377
Dieser Druck ist gleich der Schwere einer Luftsäule, welche die Oberfläche des Körpers zur Grundfläche, und die Hö- he des Dunstkreises zur Höhe hat....	378
Fremde Körper schwimmen in der Luft..	380
Wenn sie auf einer Seite dünner gemacht wird, so drückt sie gegen die andere desto mehr, und kan also feste Körper zerbrechen.....	382·383
Wie die Schwere eines gewissen Volumens Luft zu finden?.....	393
Die Luft widersteht einem in ihr bewegten Körper nach dem Verhältnis ihrer Dich- tigkeit.....	409
Detto nach dem Verhältnis der Oberfläche.	412
Nach welchem Verhältnis die Bewegungs- kraft zweener ungleichen Körper in der Luft nach und nach vermindert wird..	414
Wie sich die Widerstände der Luft gegen zween gleiche Körper aber von verschie- dener Geschwindigkeit verhalten?.....	415
Durch den Widerstand der Luft wird jede gleichförmige Bewegung in eine abneh- mende verwandelt.....	417

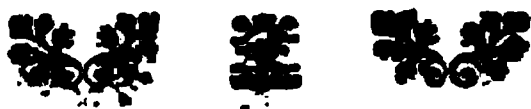


55.

Die Luft drückt das Wasser in einem hohlen Körper, in welchen sie verdünnet worden.	464
Die sich in einen hohlen Körper ausdehnende Luft bringt das in demselben befindliche Wasser zum springen.	465
Luftsäule. Eine des Dunstkreises haltet einer Wassersäule von gleicher Grundfläche und 32 Schuhhöhe das Gleichgewicht.	386, 388
Und einer Quecksilbersäule von 28 Zollen.	394, 395
Wie die Schwere einer Luftsäule zu finden.	390
Luftpumpe: ihre Beschreibung nach.	361
Maschine: was eine ist?	20
Welche die einfachen?	210
Und welche die zusammengesetzten genant werden?	263
Masse eines Körpers: wie sie sich verhalten?	2
Mechanik: was sie ist?	19
Mittelpunkt der Schwere, und Grösse: siehe Schwere.	
Rad an der Welle: was es ist?	228
Wie sich an demselben die Kraft zur Last verhält, wenn sie im Gleichgewicht sind?	231
Kan als ein ewiger Hebel angesehen werden	234
Rädermaschinen: was eine ist?	284
Wie die Kraft und Last sich an einer verhält?	285
Wie	



	SS.
Wie oft sich jedes Getrieb umdrähen muß, bis das Rad sich einmal umdrähet?...	287
Wie sich also die Umdrähungen eines Ge- triebes und eines Rades zu ihren Ra- dien verhalten?.....	288
Wenn die Umdrähungen des letzten Rades oder der Welle gegeben, wie die An- zahl der Umdrähungen des ersten oder der Kurbel zu finden?.....	291
In einer Rädermaschine verhält sich auch die Kraft zur Last, wie umgekehrt die Räume, welche sie in gleicher Zeit be- schreiben.....	292
Anordnung einer Rädermaschine, in wel- cher das erste Getrieb eine verlangte Anzahl Umdrähungen machen sol, in- dem das letzte Rad mit seiner Welle sich einmal umdrähet.....	293
Anordnung einer Rädermaschine, an wel- cher eine gegebene Kraft einer gewissen Last das Gleichgewicht halten sol.....	295
Raum. In der gleichförmigen Bewegung sind die durchflossenen Räume in zusam- mengesetzter Verhältnis der Zeiten und Geschwindigkeiten.....	24
Sind also die Geschwindigkeiten gleich, so verhalten sich die durchflossenen Räume wie die Zeiten.....	25
Wie der durchflossene Raum eines Körpers bei zusammengesetzten Kräften in ver- schiedenen Fällen zu finden?.....	37·38·40



55.

In der zunehmenden Bewegung verhalten
sich die durchloffenen Räume wie die
Quadrate der Zeiten.

42

Ein gleichförmig bewegter Körper beschreibt
einen doppelten Raum in der Zeit als
ein Körper mit beschleunigter Bewegung
dessen Geschwindigkeit am Ende seines
Falles eben so groß ist, als die des
gleichförmig bewegten.

44

Die in beschleunigter Bewegung in gleichen
auf einander folgenden Zeiten durchloffe-
nen Räume wachsen wie die ungeraden
Zahlen.

45

Zween freifallende Körper beschreiben in
gleichen Zeiten gleiche Räume.

53

Die Räume so ein Körper über ver-
schiedene schiefe Flächen in gleicher Zeit
durchläuft, verhalten sich wie die Si-
nusse der Winkel, welche die Flächen
mit dem Horizont machen.

70

Reibung: die sich berührenden, und wider-
sinnig bewegten Körper reiben sich. . . .

303

Von was die Reibung abhänget?

304

Wie ihre Grösse in verschiedenen Fällen,
und Theilen der Maschinen zu berechnen? 305-324

Mittel wider die Reibung. 325

Richtung: In, über und unter den Hori-
zont. In horizontaler Richtung be-
schreiben die geworfenen Körper eine
halbe Parabol.

77

In schiefer Richtung über den Horizont ei-
ne ganze Parabol.

84

Nach



	SS.
Nach der Richtung unter den Horizont nur ein Stück einer halben Parabol.	85
Richtungslinien. Ein Körper der durch zwei Kräften, deren Richtungslinien einen Winkel machen, bewegt wird, folget der Diagonal.	32
Wie die Richtungslinie, der ein Körper folgen wird, zu finden, wenn mehrere Kräfte zugleich in ihn würfen?	38 • 40
Was die Richtungslinien der Kraft und Last an einem Hebel sind?	213
Wenn die Richtungslinien der Kraft und Last schief auf einem Hebel stehen, wie die Abstände derselben von dem Ruhe- punkt zu betrachten?	224, 226, 227
Die Richtungslinie der Kraft an einem Rade an der Welle sol eine Tangente sein.	233
Die schiefe Richtungslinie macht bei der beweglichen Flaschenscheibe einen Unter- schied in dem Verhältnis der Kraft zur Last.	245
Was die Stellung der Richtungslinie der Kraft bei einer schief liegenden Fläche für eine Veränderung in dem Verhält- nis der Kraft zur Last verursacht?	246, 248, 251
Rinnsal eines Flusses: was ein regelmässi- ger, und ein unregelmässiger?	438
Ruhe: was sie ist?	3
Saugspritze: was sie ist?	456



	SS.
Das Wasser kan in derselben nicht über 32 Schuh hoch gebracht werden.	459
Schraube: was eine ist?	257
Wie sich an einer blossen Schraube allein die Kraft zur Last verhält?	260
Wie wenn sie durch einen Hebel oder Schlüssel bewegt wird?	261
Schraube ohne Ende: was sie ist?	296
Wie sich an derselben die Kraft zur Last verhält?	298, 299
Schwere: was sie ist?	6
Berursacht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.	46
Bemühung der Schwere: was solche ist?	166
Die Bemühungen der Schwere zweener gleich schwerer und in ungleichen Ent- fernungen von dem Ruhepunkte eines Hebels befindliche Körper verhalten sich wie diese Entfernungen.	179
Wenn die Schweren zweener an einem Hebel angebrachten Körper mit ihren Abständen von dem Ruhepunkte in ver- kehrter Verhältnis stehen, so halten sie sich das Gleichgewicht.	181
Mittelpunkt der Schwere: was er ist?	158
Durchmesser der Schwere: was er ist?	161
Fläche der Schwere: was sie ist?	163
Mittelpunkt der Größe: was er ist?	169



SS.

In einigen Körpern ist der Mittelpunkt der Schwere und Grösse einerlei.	175
Wie der Mittelpunkt der Schwere an verschiedenen Linien und Flächen zu finden?	177, 183, 184, 186, 188, 196

Der Inhalt einer Fläche, die aus der Bewegung einer Linie, oder der Inhalt eines Körpers der aus der Bewegung einer Fläche entsteht, ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Linie oder Fläche, in den Weg, den ihr Schwerpunkt bei der Erzeugung beschreibt.	195
--	-----

Wie der Inhalt verschiedener Körper durch Hülfe des Schwerpunkts zu finden?	197, 204
---	----------

Wie der Ort der Schildzapfen an einer Kanonne zu finden?	206
--	-----

Wenn ein Körper in Gefahr ist umzufallen und wenn nicht?	207, 208
--	----------

Schiefe Fläche: was sie ist?	57
--	----

Ein Körper fället langsamer über dieselbe, als wenn er frei fällt.	58
--	----

Von dem Falle der Körper über schiefe Flächen ist eben das verhältnismässig zu verstehen, was vom senkrechten Falle.	62
--	----

Wie sich die Kraft zu der auf einer schiefen Fläche befindlichen und mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last verhält?	246, 251
---	----------

Wie sich die durchloffenen Räume der Körper welche über verschiedene schiefe Flächen laufen, verhalten?	70
---	----



Berechnung der Kraft, welche nöthig ist, so wohl eine auf einer schiefen Fläche liegende Last als die entstehende Reibung zu überwinden.....	322, 323
Senkungswinkel: siehe Erhöhungs- oder Erniedrigungswinkel.	
Stampfwerk. Beschreibung desselben.....	483
Stifel: was einer ist?.....	485
Stoß eines Körpers: was ein gerader und ein schiefer ist?.....	122
Wenn ein Körper an einen andern unbe- weglichen anstößet, und einer ist ela- stisch, so wird der erste mit der nehm- lichen Geschwindigkeit und Richtung zu- rückgetrieben, mit der er angestossen hat.....	137
Wie sich die Kraft des senkrechten Stoses zu der des schiefen verhält?.....	142
Was geschieht, wenn ein elastischer Kör- per an einen andern ruhenden an- stößet?.....	143
Was bei dem Stose mehrerer gleicher und sich berührender Körper geschi- het?.....	144
Ein mehreres siehe unter Kraft der Be- wegung.	
Stoß des Wassers gegen eine Fläche. Von was er abhänget?.....	468
Wie	



SS.

Wie die Kraft desselben gegen eine senkrechte und ruhende Fläche zu bestimmen?	469, 470
Was bei der Bestimmung derselben noch besonders zu erwegen kommt?	472, 476
Was geschieht, wenn die Anstoßfläche auch beweglich ist?	477
Die Kraft des Stoses gegen ein Wasserrad zu finden, wenn es die größtmögliche Wirkung machen sol.	479
Wie die Kraft des senkrechten Stoses sich zu der des schiefen sich verhält?	480
Thermometer: zu was er dienet, und wie er zu verfertigen?	403
Ventil. Beschreibung der gebräuchlichsten Arten.	485
Vermögen: was das wirkliche, und das ungebundene an einer Kraft?	10
Wassermachine: was eine ist?	481
Wie eine anzuordnen, welche die Last im Kreise herum bewegt?	482
Wie eine, welche die Last durch eine Daumenwelle auf und nieder bewegt? .	483
Wie durch den krummen Zapfen?	484
Wasserpumpe: ihre Beschaffenheit.	485, 486
Wasserrad: verschiedene Gattungen derselben, nebst ihrer Beschreibung und Anmerkungen.	484

Wie



Wie ihre Geschwindigkeit in Ansehung des Stromes einzurichten , damit sie die größtmöglichste Wirkung machen ? .	SS. 478
Widerstand : was er ist ?	8
Wurf : was einer ist ?	72
Ist aus zwei Kräften zusammengesetzt ?...	73
Was ein horizontaler , senkrechter , ein schiefer , ein erhöhter , und ein gesenk- ter Wurf genent wird ?	74
Wurfweite : was sie überhaupt und was eine erhöhte , und gesenkte ist ?	75
Wie sie aus der gegebenen Geschwindig- keit der Kraft , samt der Dauerzeit des Wurfs und den Erhöhungswinkel zu finden ?	90
Solche verhalten sich in zweien mit ver- schiedenem treibenden Kräften gemachten Würfen wie die Quadrate der Ge- schwindigkeiten.	91
Wenn von zweien mit gleicher Kraft ge- schehenen Würfen ihre verschiedenen Er- höhungswinkel samt der Wurfweite des einen bekant , wie die des andern zu finden ?	97
Die Wurfweiten welche mit einerlei Kraft in verschiedenen Erhöhungswinkeln er- reicht werden , verhalten sich wie die Sinusse der doppelten Erhöhungswinkel.	99
Die Wurfweite im 45ten Grade ist die Gröste.	100



Die Wurfweiten, die in Erhöhungswinkeln erreicht werden, welche gleichweit über und unter den 45ten Grade sind, sind gleich.	101
Aus den gegebenen Erhöhungswinkeln zweier Würfe nebst der Wurfweite des einen die Wurfweite des andern zu finden.	102
Wenn man eine gegebene Wurfweite nicht erreichen kan?	104
Der Parameter der Achse einer von einem geworfenen Körper beschriebenen Parabol ist die Dritte proportional zu der Wurfung der Schwere am Ende des Wurfs, und zu der erreichten Wurfweite.	105
Wenn die horizontale Wurfweite im 1sten oder 45ten Grade bekannt, wie der Erhöhungswinkel für eine andere Wurfweite zu finden?	115, 116, 117
Wenn eine horizontale Wurfweite bekannt, wie der Erhöhungswinkel für eine andere über dem Horizont befindlichen Wette zu finden?	118, 119
Wie dieses geschieht, wenn die neue Wurfweite unter den Horizont gesenkt ist? .	120
Wie die Wurfweiten ohne Rechnung mittelst einem Instrument in verschiedenen Fällen gefunden wird?	120
Zahnräder: was sie sind?	277
Verschiedene Gattungen derselben.	279



Seite S.

Wie der Umtreise derselben aus der Dicke
und Anzahl ihrer Zähnen zu finden? . 283

Zeit. In der beschleunigten Bewegung ver-
halten sich die Zeiten wie die Quadrat-
wurzeln der durchlossenen Räume. . . . 43

Wie die Zeit zu finden in der ein Kör-
per von einer gegebenen Höhe fallet? . 50

Dauerzeit eines Wurfes. 76

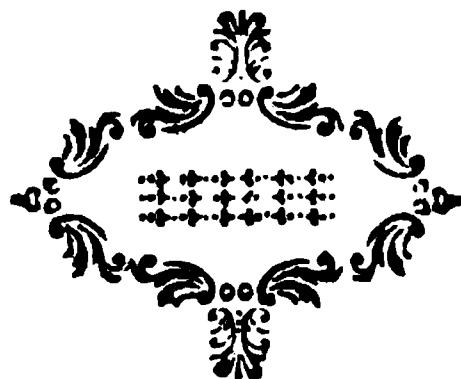
Wie sie zu finden? 81-89-92

Wie sie sich bei gleichen Geschwindigkeiten
und verschiedenen Richtungswinkeln ver-
halten? 94

Wie sie von einem Wurf dessen Erhöhungs-
winkel gegeben ist, zu finden, wenn sie
von einem andern Wurf samt seinem Er-
höhungswinkel schon bekannt ist? 95 • 96

Wie sich die Zeiten der Ausleerungen
zweier prismatischer Gefäße verhalten? 427-430

Wie die Zeit zu finden, in welcher ein
Gefäß sich ausleeret? 433



Verbesserungen einiger eingeschlichenen Fehler.

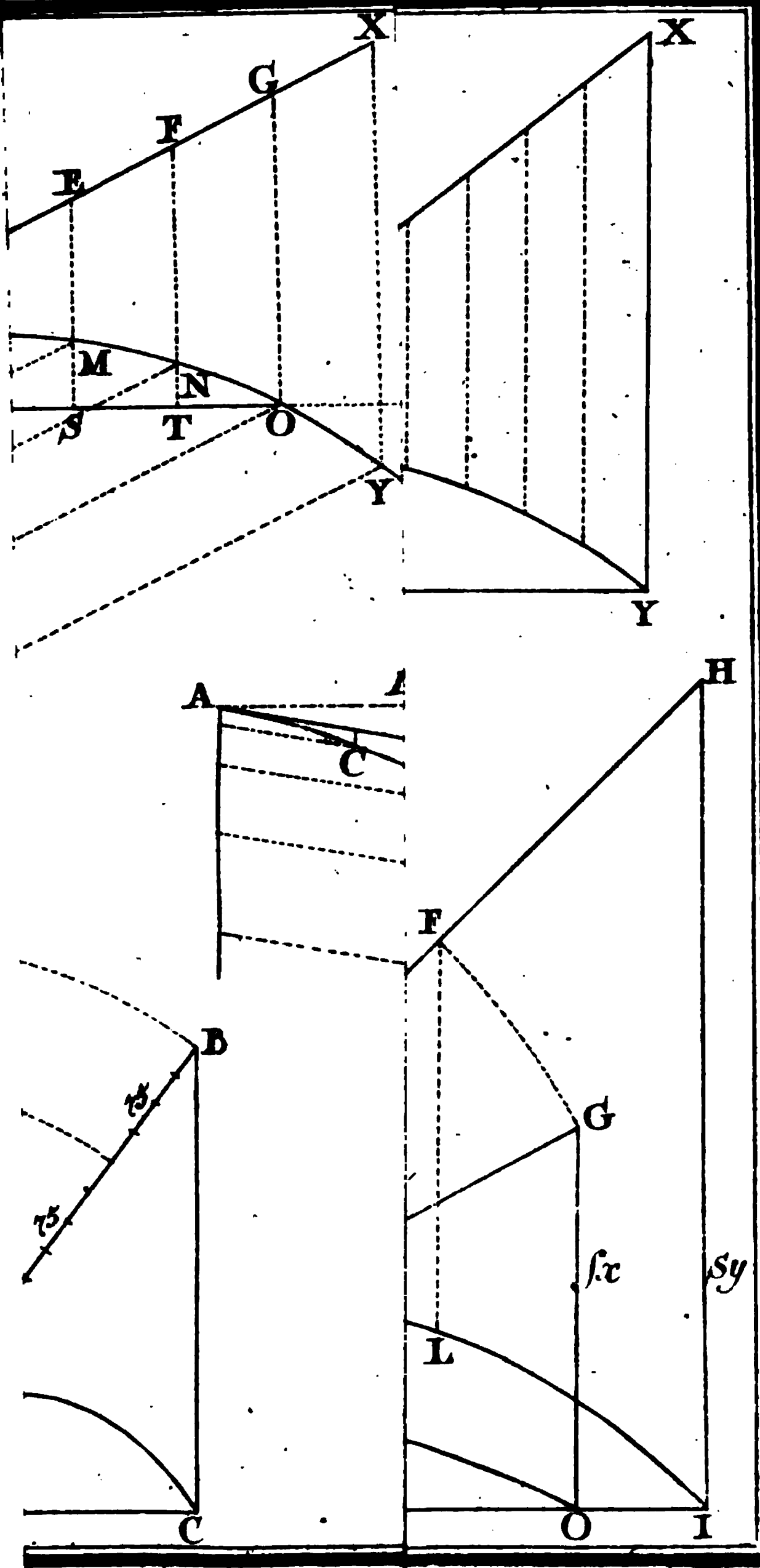
- §. 33. In der 4ten Zeile anstatt (größer) setze (bald größer bald kleiner).
In der 7ten Zeile anstatt (einen grössern Raum) setze (auch bald einen grössern, bald einen kleinern Raum).
In der 9ten Zeile nach (Richtung) setze (zugleich).
In der 12ten Zeile nach (aufheben) setze (nachdem nemlich der Winkel BAC beschaffen ist).
- §. 41. In der 2ten Zeile anstatt (HY) setze (DS).
In der 6ten Zeile anstatt (CS) setze (DS).
In der 19ten und folgenden Zeilen dieses §. anstatt (CS) setze (DS).
- §. 65. In der 4ten Zeile nach (Fläche) setze (von gleicher Höhe).
In der 31ten Zeile nach (senkrecht) setze (durch EF).
- §. 67. In der 3ten Zeile nach (Fläche) setze (von gleicher Höhe).
- §. 70. In der 2ten Zeile nach (Flächen) setze (von gleicher Höhe).
- §. 77. In der 29ten Zeile anstatt (§. 45.) setze (§. 25.).
- §. 158. In der 6ten Zeile nach (gleiche) setze (Bemühung der).
- §. 170. In der 4ten Zeile nach (regelmässigen) setze (symmetrischen).
In der 6ten Zeile nach (Kubus) setze (Parallelopipedum).

§. 176. In der 10ten Zeile nach (regelmässigen) setze
(und symmetrischen).

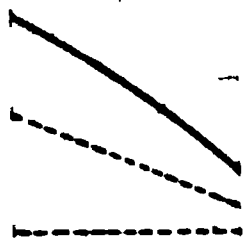
In der 14ten Zeile anstatt (Prismen) setze
(Parallelopipeden).

§. 195. In der 1ten Zeile nach (aus der) setze (senk-
rechten).

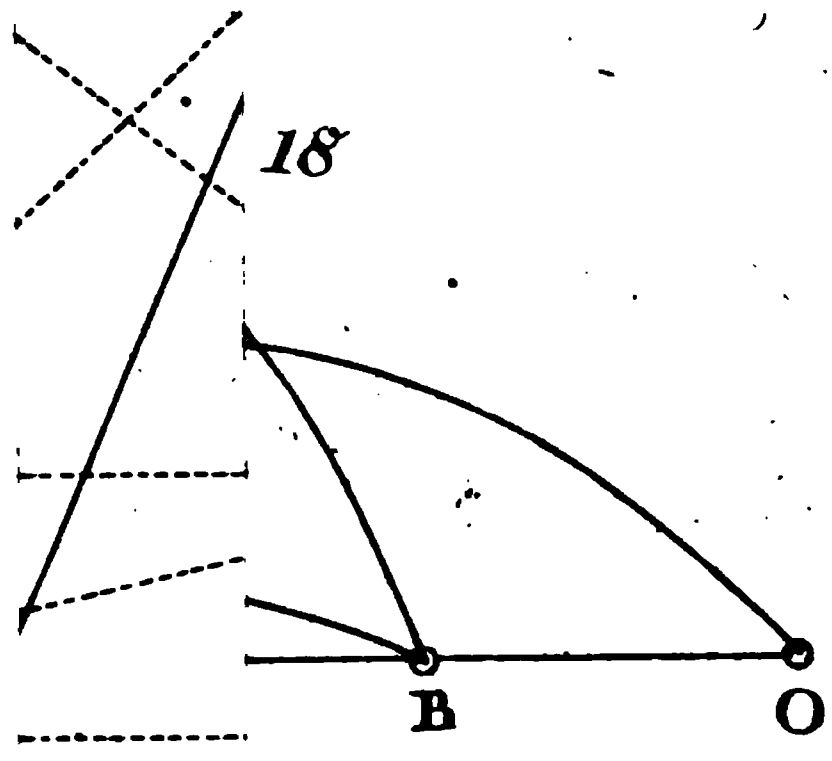
In der 3ten und 26ten eben so.



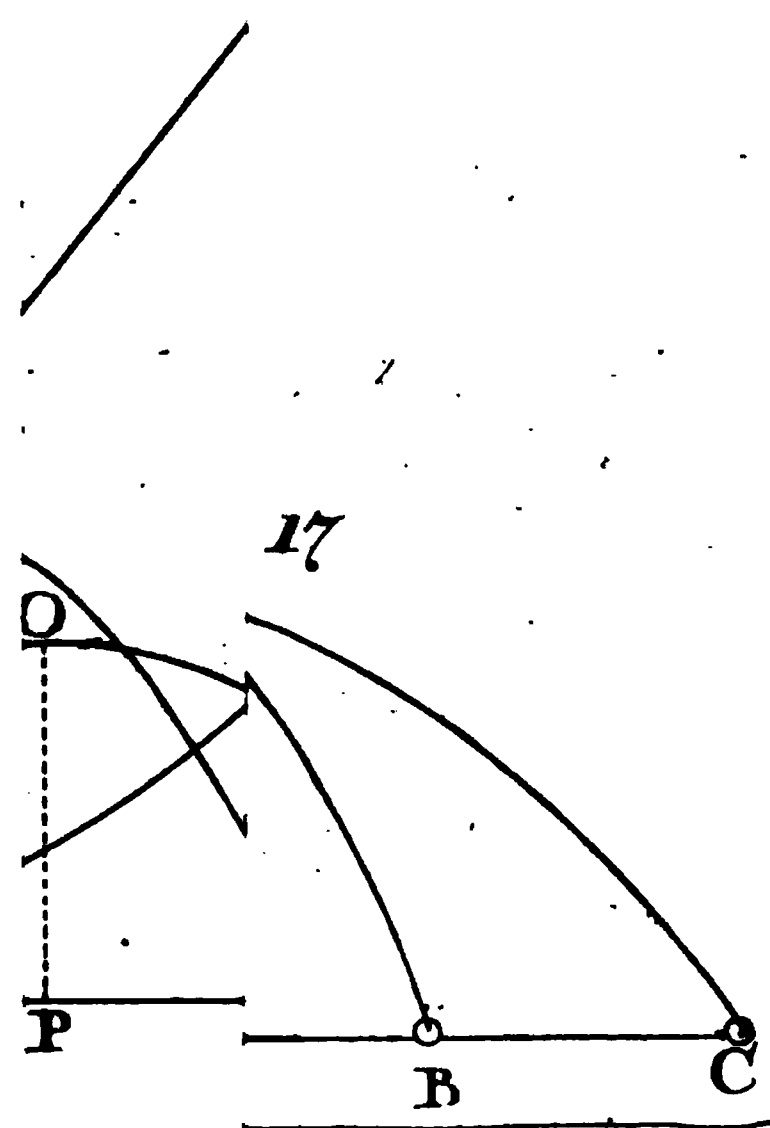
16



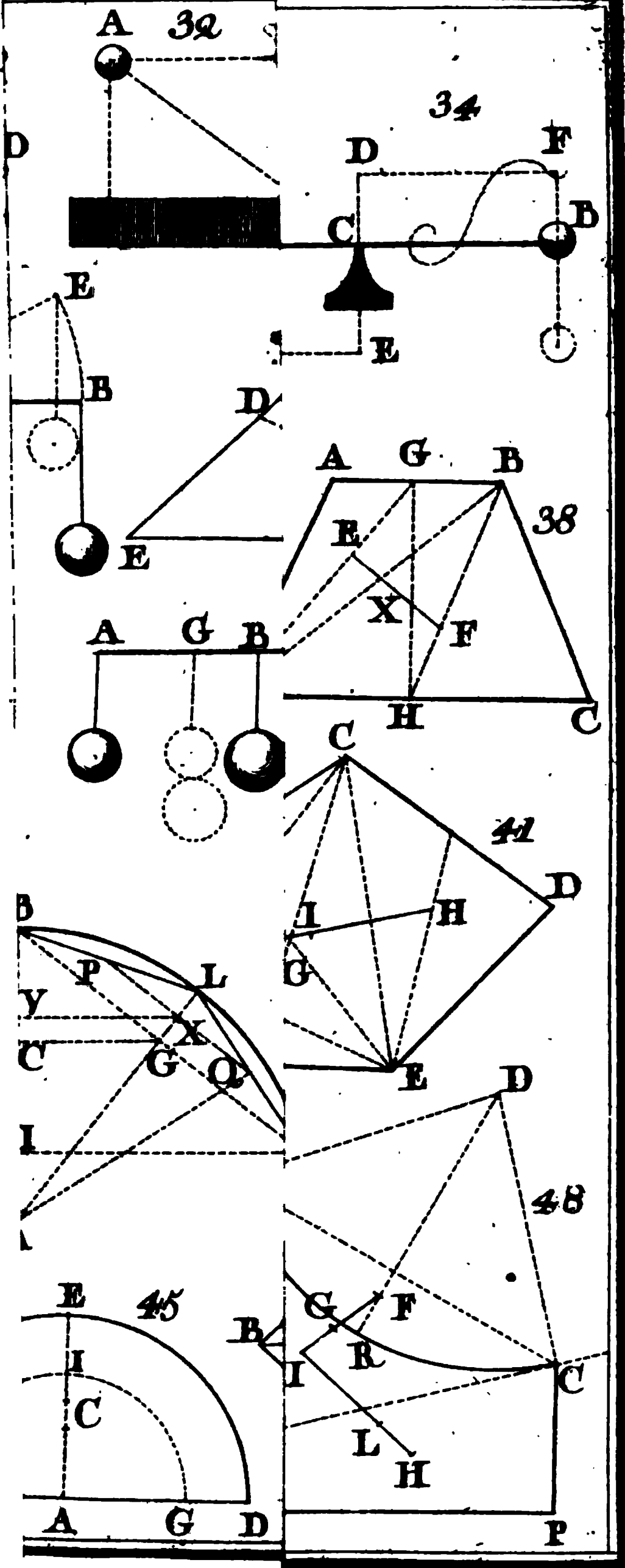
18



17

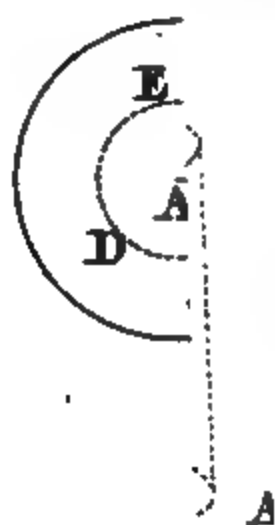






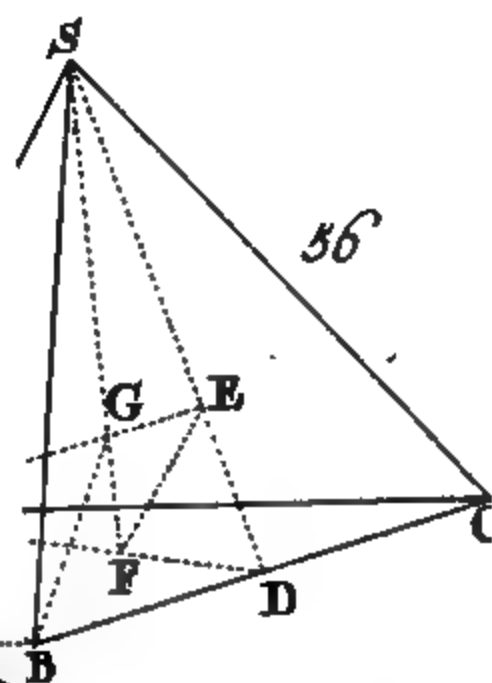
F

D



S

56



E

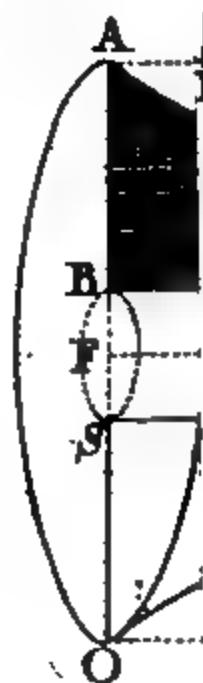
57

B



A

B



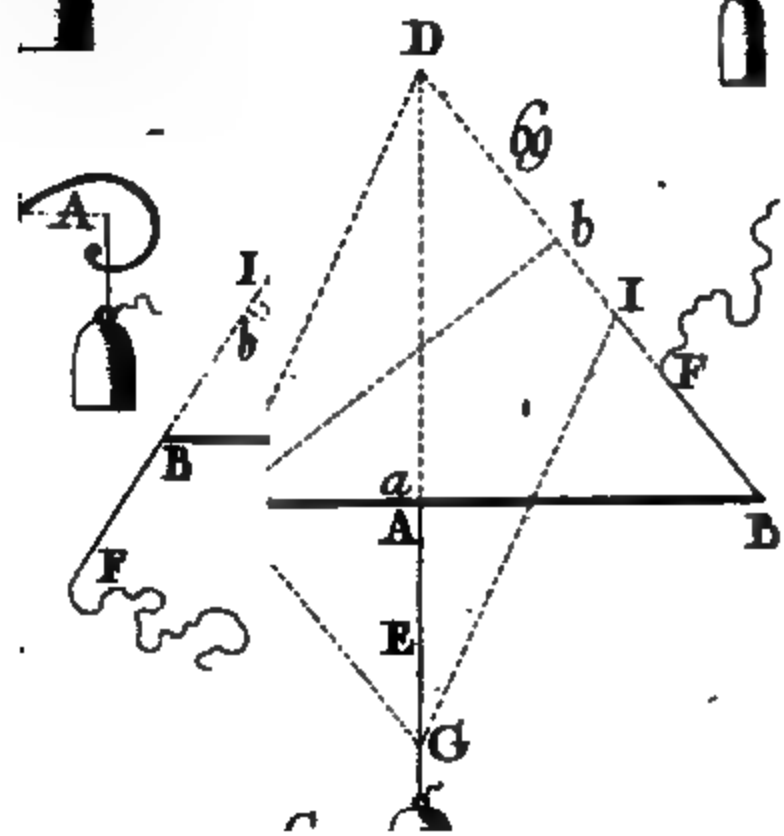
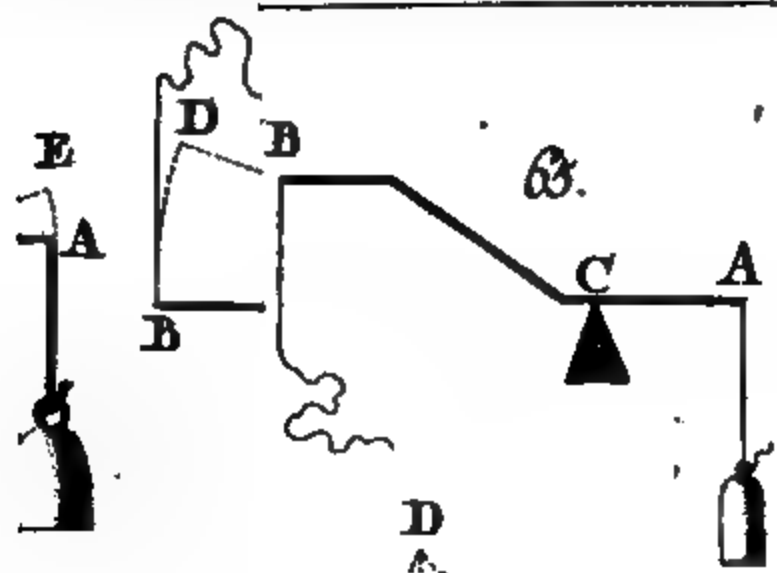
B

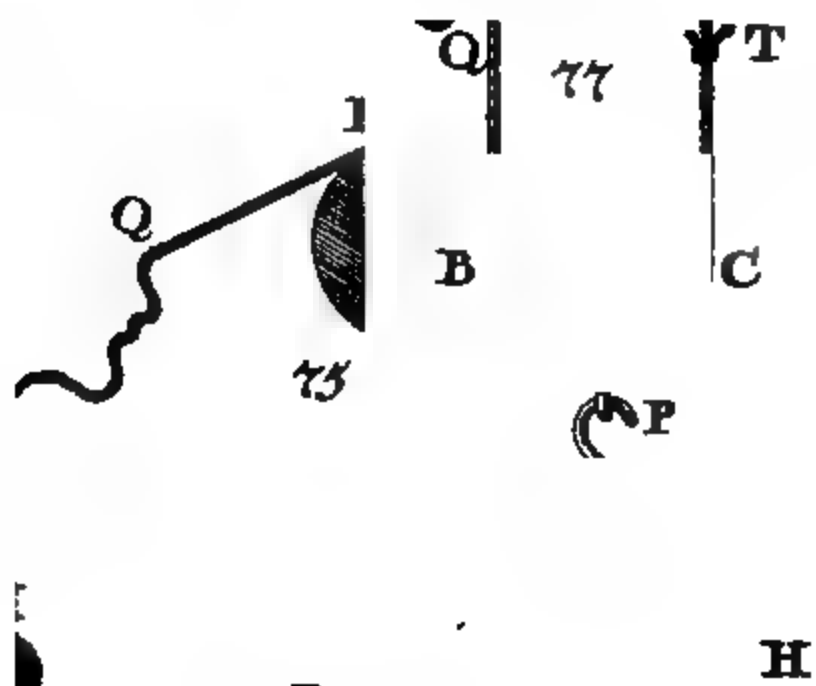
F

S

O

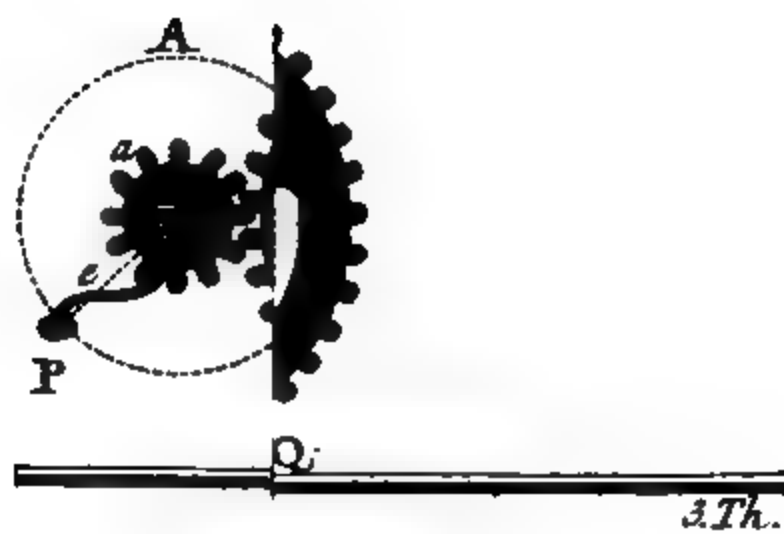


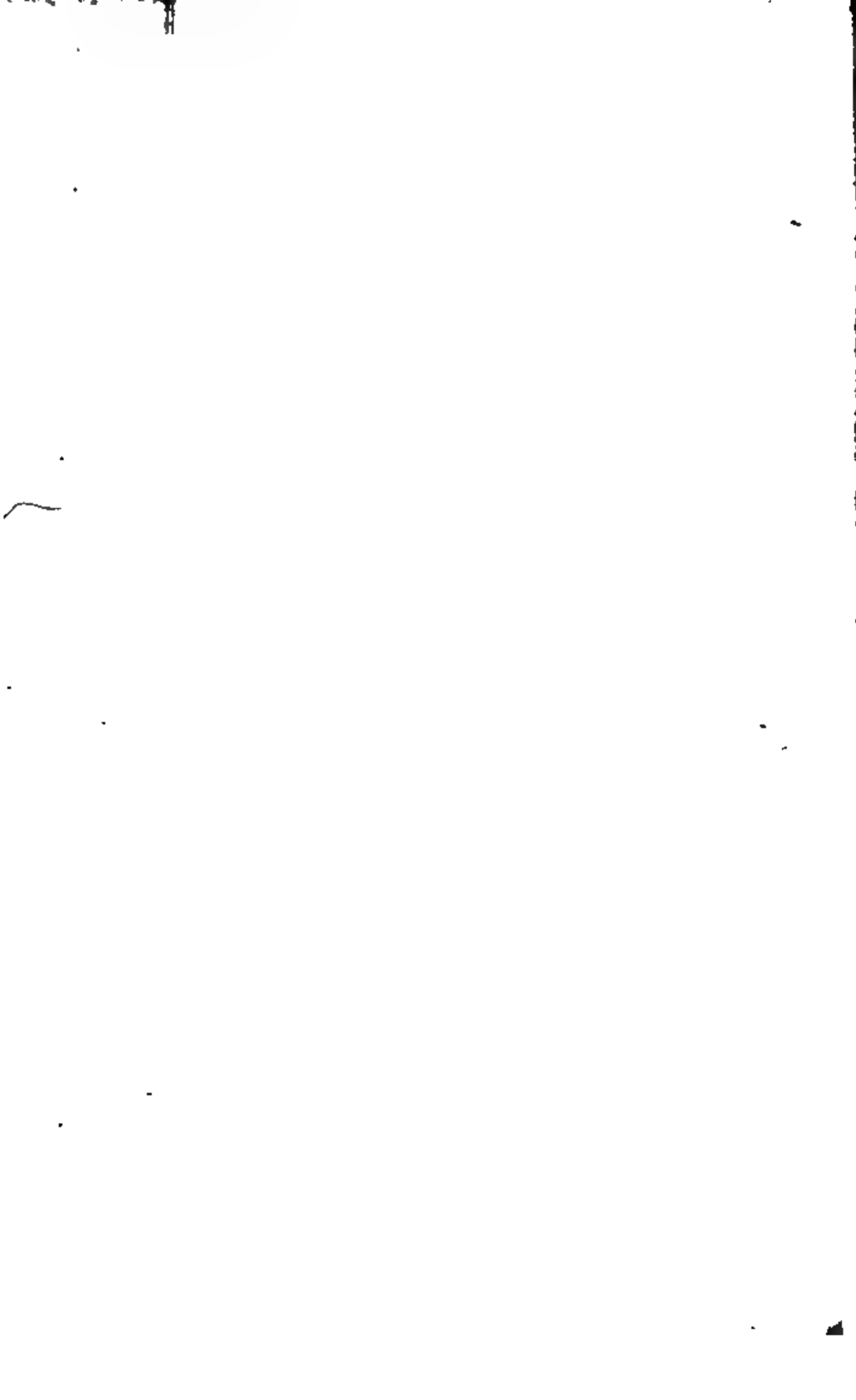


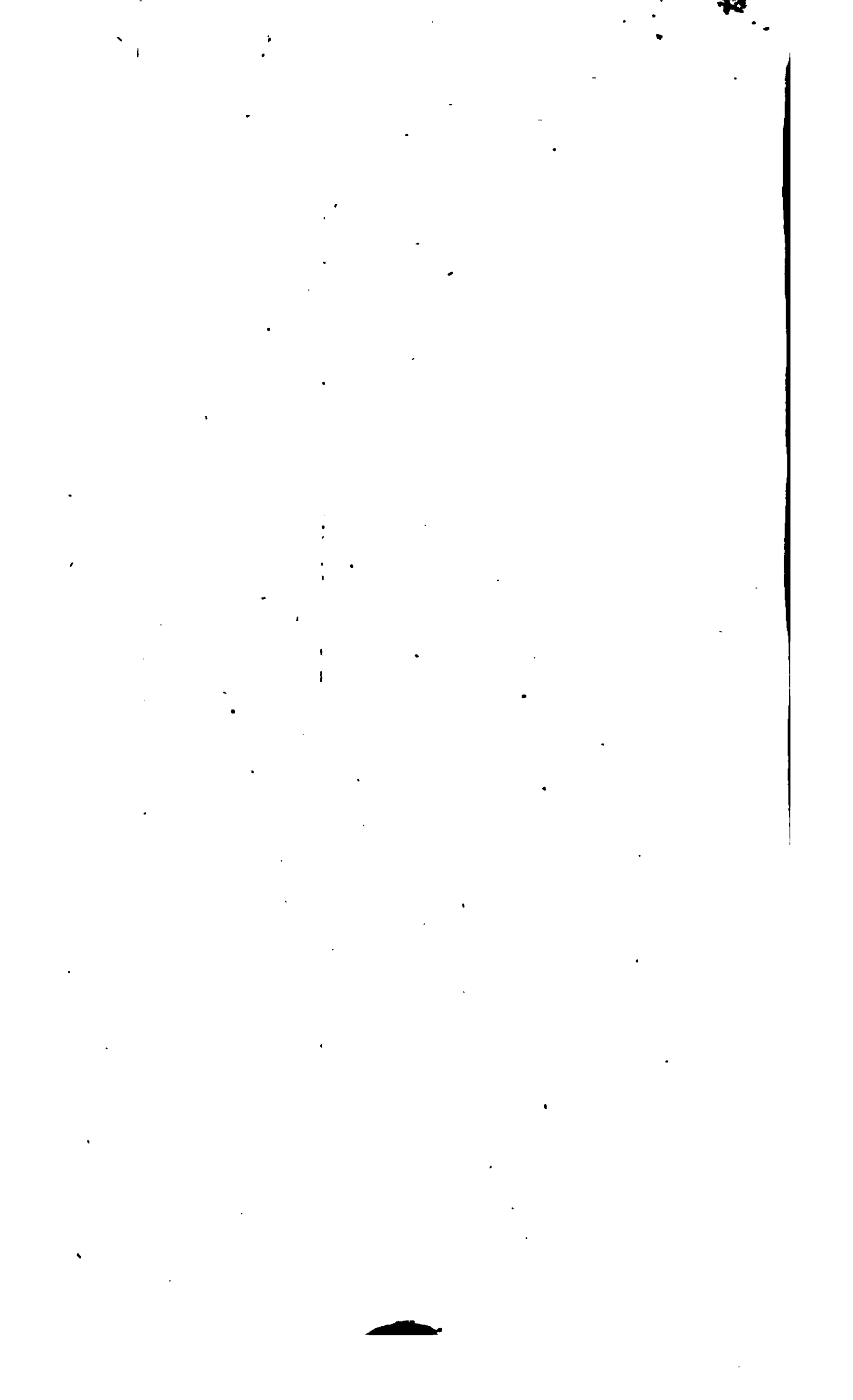


G^{∞}
Q
P

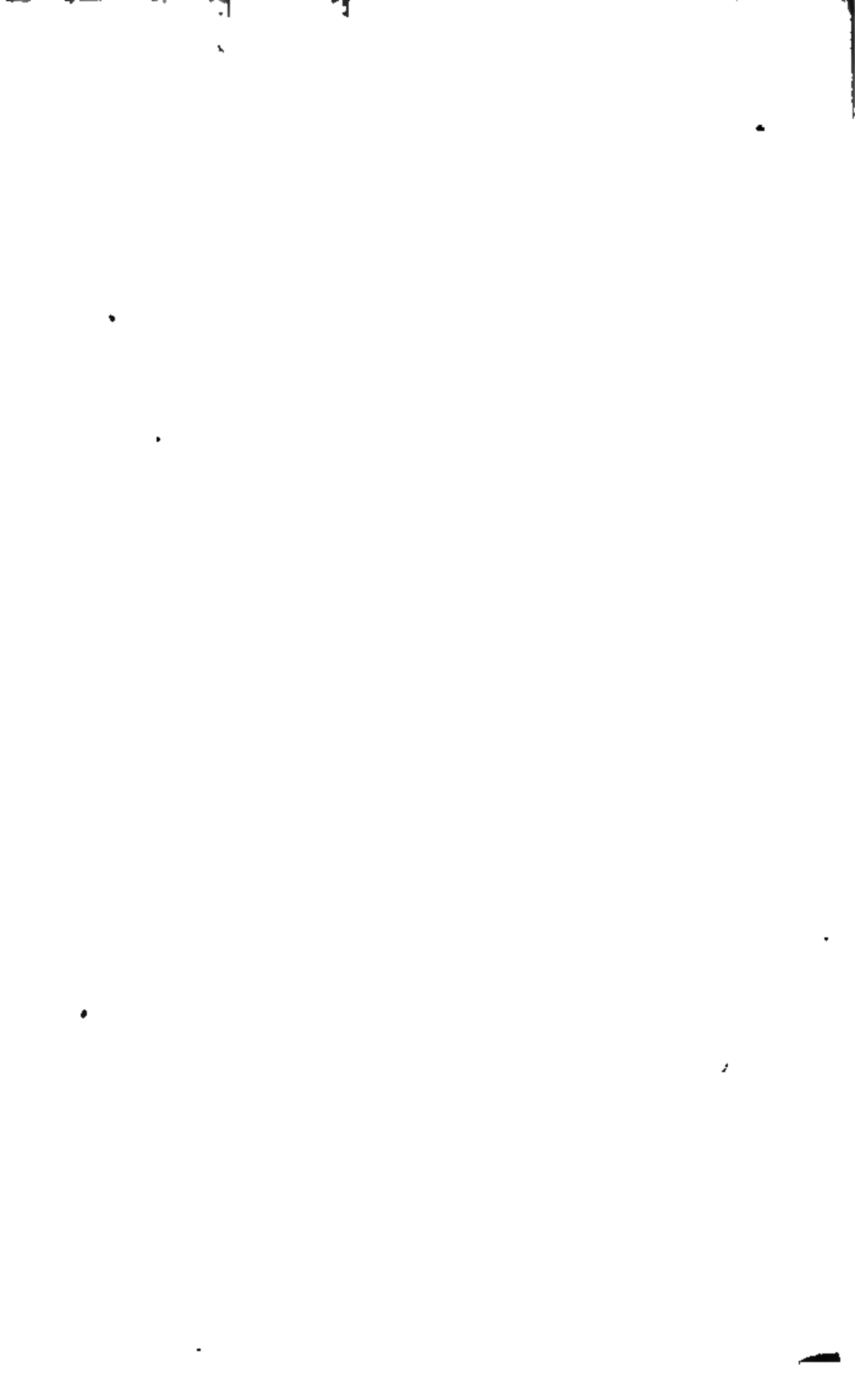
P'













Tuf.

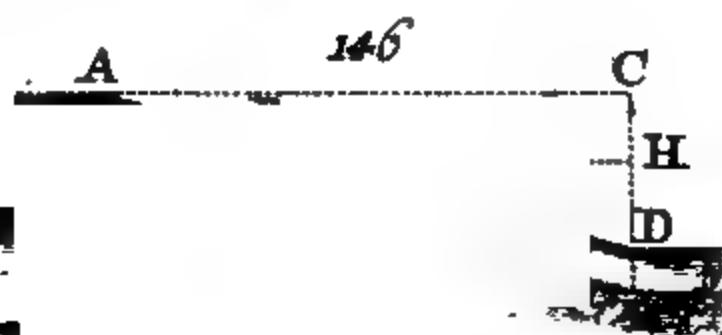
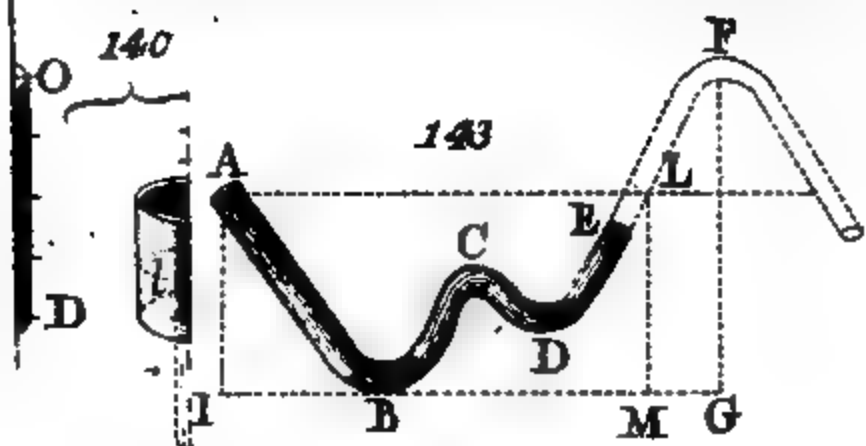
2130

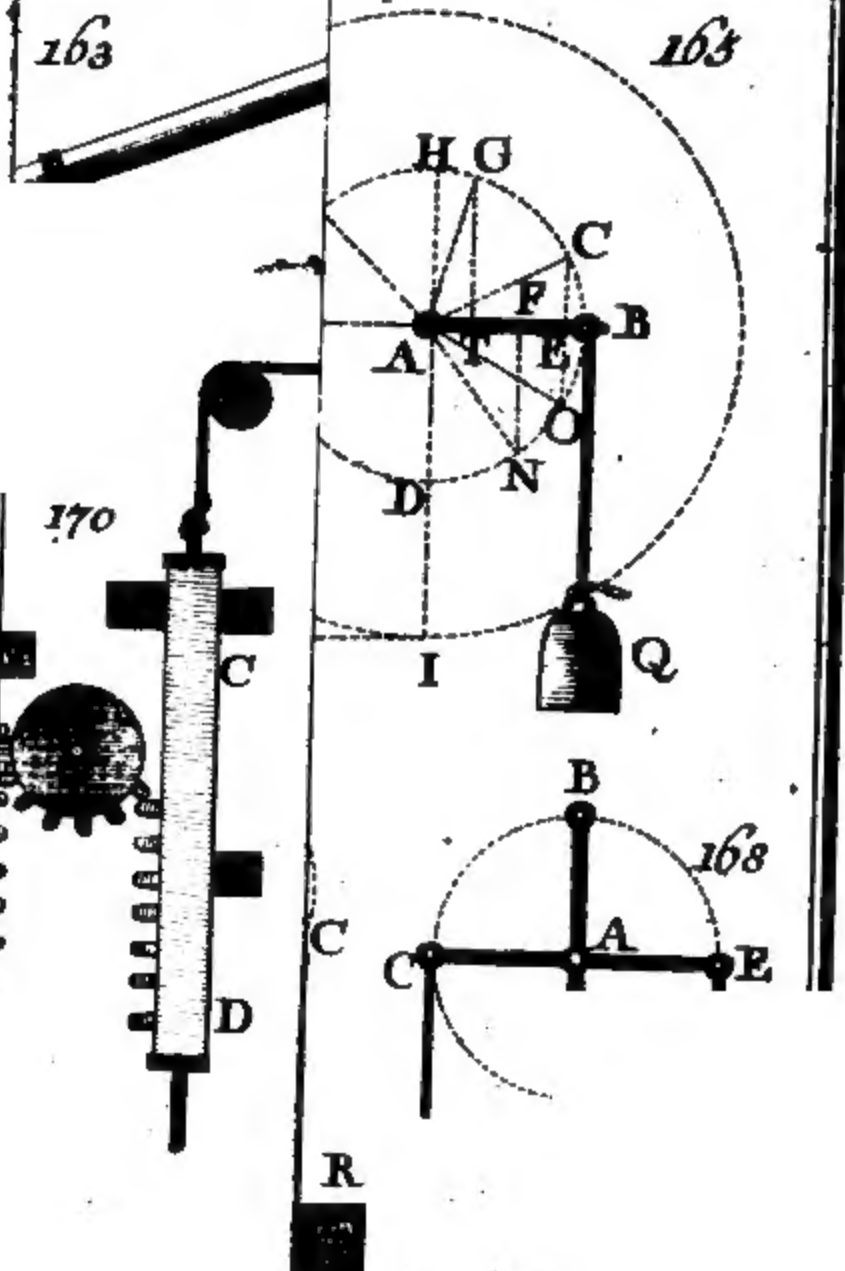
11

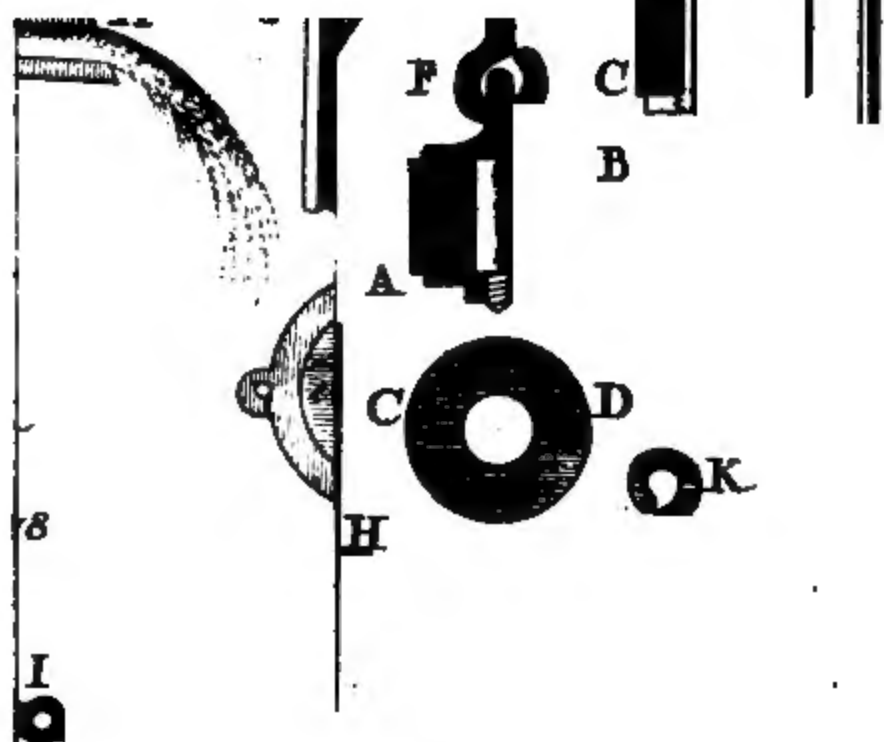
1

11

h







170

100

D

3.Th.

